EVALUAREA NAȚIONALĂ

matematică

2026

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin OMEC nr. 6250/21.12.2020.

Lucrarea este elaborată în conformitate cu programa școlară pentru susținerea Evaluării Naționale pentru absolvenții clasei a VIII-a și cu modelul de structură de subiect și baremul de evaluare și notare în vigoare.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Andreea Roșca, Iuliana Ene, Roxana Pietreanu
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu, Carmen Rădulescu, Mioara Benza
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie
Credite foto: shutterstock.com

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Evaluarea Națională 2026 : Matematică : clasa a VIII-a /
Gabriel Popa, Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Dorel Luchian. –
Pitești : Paralela 45, 2025
ISBN 978-973-47-4325-4

I. Popa, Gabriel
II. Zanoschi, Adrian
III. Iurea, Gheorghe
IV. Luchian, Dorel

51

8

Gabriel Popa, Adrian Zanoschi,
Gheorghe Iurea, Dorel Luchian

EVALUAREA NAȚIONALĂ

matematică

2026

Editura Paralela 45

MEMORATOR DE MATEMATICĂ

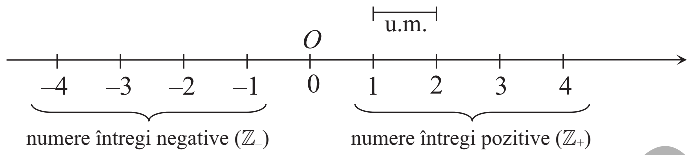
ALGEBRĂ

MULȚIMI NUMERICE

$\mathbb{N}$ – mulțimea numerelor naturale; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{Z}$ – mulțimea numerelor întregi; $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$; $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.



$\mathbb{Q}$ – mulțimea numerelor raționale; $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \text{ și } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$; $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$.

$\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = mulțimea numerelor iraționale.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

OPERAȚII CU MULȚIMI

Reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$. Intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.

Diferența: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$.

OPERAȚII CU NUMERE

Factor comun: $f \cdot a \pm f \cdot b = f \cdot (a \pm b)$, $\forall\, a, b, f \in \mathbb{R}$.

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(1+n)\cdot n}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ (citim: „n factorial”); $0! = 1$.

Opusul numărului real r este numărul real $-r$. Inversul numărului real nenul r este numărul real $r^{-1} = \dfrac{1}{r}$.

TEOREMA ÎMPĂRȚIRII CU REST

În $\mathbb{N}$: $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, $\exists!\, c, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot c + r$, $0 \le r < b$.

În $\mathbb{Z}$: $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $\exists!\, c \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot c + r$, $0 \le r < |b|$.

DIVIZIBILITATE ÎN $\mathbb{N}$

Pentru $d, m \in \mathbb{N}$ spunem că $d \mid m$ dacă există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = d \cdot x$.

Proprietăți:

P_1: $1 \mid n$; $n \mid 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

P_2: Dacă $a, d \in \mathbb{N}$ și $d \mid a$, atunci $d \mid a \cdot n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

P_3: Dacă $a, b, d \in \mathbb{N}$, $d \mid a$ și $d \mid b$, atunci $d \mid (a \pm b)$.

Criterii de divizibilitate:

I. Folosind ultima cifră a numărului: $2 \mid n \Leftrightarrow u(n) \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $5 \mid n \Leftrightarrow u(n) \in \{0, 5\}$; $10 \mid n \Leftrightarrow u(n) = 0$.

II. Folosind suma cifrelor numărului: $3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid S(n)$; $9 \mid n \Leftrightarrow 9 \mid S(n)$.

III. Folosind ultimele două cifre ale numărului: $4 \mid \overline{a\ldots xy} \Leftrightarrow 4 \mid \overline{xy}$; $25 \mid \overline{a\ldots xy} \Leftrightarrow 25 \mid \overline{xy}$.

GEOMETRIE

UNITĂȚI DE MĂSURĂ

Unitatea de exprimare / Tipul măsurătorii	Submultiplii	Unitatea principală	Multiplii
Lungime	$mm \underset{\times 10}{\overset{:10}{\rightleftarrows}} cm \underset{\times 10}{\overset{:10}{\rightleftarrows}} dm \underset{\times 10}{\overset{:10}{\rightleftarrows}}$	m	$\underset{\times 10}{\overset{:10}{\rightleftarrows}} dam \underset{\times 10}{\overset{:10}{\rightleftarrows}} hm \underset{\times 10}{\overset{:10}{\rightleftarrows}} km$
Suprafață	$mm^2 \underset{\times 10^2}{\overset{:10^2}{\rightleftarrows}} cm^2 \underset{\times 10^2}{\overset{:10^2}{\rightleftarrows}} dm^2 \underset{\times 10^2}{\overset{:10^2}{\rightleftarrows}}$	m^2	$\underset{\times 10^2}{\overset{:10^2}{\rightleftarrows}} dam^2 \underset{\times 10^2}{\overset{:10^2}{\rightleftarrows}} hm^2 \underset{\times 10^2}{\overset{:10^2}{\rightleftarrows}} km^2$
Volum	$mm^3 \underset{\times 10^3}{\overset{:10^3}{\rightleftarrows}} cm^3 \underset{\times 10^3}{\overset{:10^3}{\rightleftarrows}} dm^3 \underset{\times 10^3}{\overset{:10^3}{\rightleftarrows}}$	m^3	$\underset{\times 10^3}{\overset{:10^3}{\rightleftarrows}} dam^3 \underset{\times 10^3}{\overset{:10^3}{\rightleftarrows}} hm^3 \underset{\times 10^3}{\overset{:10^3}{\rightleftarrows}} km^3$

Pentru suprafețe:
1 ha = 100 ari = 10 000 m^2; 1 ar = 100 m^2.

Pentru capacitate, unitatea principală este litrul (ℓ).
1 dm^3 = 1 ℓ; 1 cm^3 = 1 $m\ell$; 1 m^3 = 1000 ℓ.

Unitatea principală pentru masă este kilogramul (kg).
1 kg = 1000 g; 1 t = 1000 kg; 1 q = 100 kg.

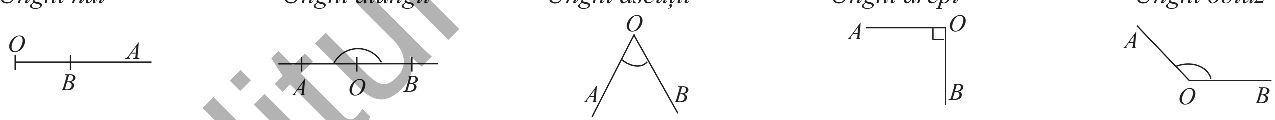
Unitatea principală pentru măsurarea timpului este secunda (s).
1 min = 60 s; 1 h = 60 min; 1 zi = 24 h.

UNGHIUL

Unghi = reuniunea a două semidrepte având aceeași origine.
Unghiurile se măsoară în grade, minute și secunde: 1° = 60'; 1' = 60".

Clasificarea unghiurilor:

Unghi nul — *Unghi alungit* — *Unghi ascuțit* — *Unghi drept* — *Unghi obtuz*



$\sphericalangle AOB = 0°$ — $\sphericalangle AOB = 180°$ — $\sphericalangle AOB < 90°$ — $\sphericalangle AOB = 90°$ — $\sphericalangle AOB > 90°$

Unghiuri congruente = unghiuri care au aceeași măsură.
Bisectoarea unui unghi = semidreapta cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul acestuia, care îl împarte în două unghiuri congruente.
Unghiuri adiacente: au același vârf, o latură comună și nu au puncte interioare comune.
Unghiuri complementare: două unghiuri care au suma măsurilor de 90°.
Unghiuri suplementare: două unghiuri care au suma măsurilor de 180°.
Unghiuri opuse la vârf: două unghiuri cu vârful comun și laturile în prelungire.
Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente.

Drepte paralele: două drepte coplanare, fără puncte comune.
Drepte perpendiculare: două drepte concurente care formează un unghi drept.

TEME RECAPITULATIVE

TEMA 1. Numere naturale. Numere întregi

1. Calculați:
a) $60 - 40 : 4$; b) $25 - 20 : (13 - 8)$; c) $142 : (1 + 2 \cdot 35)$; d) $12 + 60 : [14 - 2 \cdot (3 + 2)]$.
2. Aflați numărul natural de două cifre care adunat cu suma cifrelor sale dă 54.
3. Suma a două numere naturale este 11. Care este valoarea minimă și valoarea maximă a produsului lor?
4. Determinați toate numerele naturale n, știind că n împărțit la 12 dă câtul 5 și restul un pătrat perfect.
5. Determinați toate numerele naturale care, împărțite la un număr de două cifre, dau câtul 10 și restul 97.
6. Aflați numerele naturale a și b, știind că suma lor este egală cu 19, iar a împărțit la b dă câtul și restul 3.
7. Suma a trei numere naturale este 502. Aflați cele trei numere, știind că al doilea este triplul primului și că, împărțind pe al treilea la al doilea, obținem câtul 7 și restul 2.
8. Determinați numărul $\overline{abc}$, știind că $b = a + 2c$ și $\overline{abc}$ împărțit la 112 dă câtul a și restul 59.
9. Calculați:
a) $2^3 + 3^2 - 4^0$; b) $0^7 + 3^{10} : 3^8 - 9$;
c) $(2^5)^{12} : 2^{56} - 3^{20} : 3^{18}$; d) $25^7 : 5^{14} + 3^{90} : 27^{29}$;
e) $(2 \cdot 2^2 \cdot 2^5)^{10} : 2^{75}$; f) $(2^3 \cdot 3^4)^{12} : (2^{35} \cdot 3^{45})$;
g) $(2^{10} + 2^{11} + 2^{12}) : 2^{10}$; h) $2^5 - 3 \cdot [3 \cdot 7 - 2 \cdot (6^2 - 2^3) : 4] + 1^{123}$.
10. Fie numerele naturale $a = 2^{29} + 2^{40} : 2^{11}$ și $b = 12^{20} : 2^{40}$.
a) Arătați că $a = 2^{30}$. b) Comparați numerele a și b.
11. a) Arătați că numărul natural $a = 5 \cdot 3^{42} + 9^{20} - 10 \cdot 3^{40}$ este pătrat perfect.
b) Demonstrați că numărul natural $b = 3^{42} + 2^{43}$ nu este pătrat perfect.
12. Fie numărul natural $a = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{10} + 3^{11}$.
a) Arătați că a este număr par. b) Arătați că numărul a este divizibil cu 10.
13. Demonstrați că numărul natural $a = 2^{n+3} \cdot 7^n + 7^{n+1} \cdot 2^n - 3 \cdot 14^n$ se divide cu 12, pentru orice număr natural n.
14. Demonstrați că, dacă $\overline{ab} = 3 \cdot \overline{cd}$, atunci numărul natural $\overline{abcd}$ se divide cu 7.
15. Determinați toate numerele prime p, q, r, știind că $p + 4q + 54r = 392$.
16. a) Descompuneți în factori primi fiecare dintre numerele: 56, 72, 144 și 2700.
b) Câți divizori naturali are numărul 48?
17. Determinați toate valorile posibile ale numărului natural n în fiecare dintre următoarele cazuri:
a) $n = \overline{7x}$ și $2 \mid n$; b) $n = \overline{6xy}$, $2 \mid n$ și $9 \mid n$;
c) $n = \overline{x5y}$, $4 \mid n$ și $3 \mid n$; d) $n = \overline{1xy}$, $5 \mid n$ și suma cifrelor lui n este 8.
18. Calculați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun pentru următoarele numere:
a) 48, 60; b) 12, 15, 18.
19. Elevii unei clase au cumpărat 168 de mere, 96 de portocale și 72 de banane. Ei vor să facă pachete cu fructe pentru a le oferi unui cămin de bătrâni. Toate pachetele trebuie să fie la fel și să conțină și mere și portocale și banane. Care este cel mai mare număr de pachete pe care pot să le facă elevii?
20. La o florărie, vânzătoarea observă că, dacă grupează toate florile câte 18 și toate florile câte 24, rămân de fiecare dată câte trei flori. Aflați câte flori sunt în florărie, știind că numărul lor este cuprins între 450 și 570.
21. La o ședință de pregătire, antrenorul împarte sportivii în grupe numeric egale (cu cel puțin 2 sportivi) pentru diverse exerciții. Dacă face grupele de câte 6 sportivi, rămân 3 sportivi în afară, dacă face grupele de câte 4, rămâne unul în afară, iar dacă face grupele de câte 9, atunci 6 dintre sportivi nu sunt folosiți. Aflați câți sportivi are antrenorul, știind că numărul lor este mai mic decât 50. Cum ar trebui să facă grupele antrenorul, pentru ca să nu rămână sportivi pe dinafară și numărul grupelor să fie cât mai mare?
22. Sanda a cumpărat CD-uri în valoare de 486 de lei. Unele CD-uri au costat 54 de lei, iar celelalte au costat 90 de lei. Aflați câte CD-uri a cumpărat Sanda.
23. a) Ordonați crescător numerele întregi: 1, –3, 0, –2, –7, 9, 4.
b) Ordonați descrescător numerele întregi: –4, 1, 3, –2, 7, –1, –5.

24. Produsul a trei numere întregi a, b și c este egal cu 8. Aflați cea mai mică valoare posibilă a sumei $a + b + c$.

25. Calculați:

a) $3 \cdot (-5) - (-12)$; b) $(1 - 2 + 3 - 4) : (-2)$;

c) $(-45) : (3 - 8) + (-2) \cdot 2$; d) $13 + 24 : (-2)$;

e) $(-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3$; f) $(-2)^2 - (-2)^3 + 3^2$;

g) $2^8 : (-2)^6 - (-5)^0$; h) $2 - (-3)^4 \cdot 3^5 : (-3)^7$.

26. Un meteorolog a urmărit temperatura medie în șase zile consecutive. În prima zi, temperatura medie a fost de –22°C, iar în fiecare din zilele următoare, temperatura medie a crescut cu câte două grade față de ziua precedentă. Calculați media temperaturilor medii din cele șase zile.

27. Calculați suma tuturor divizorilor întregi ai numărului 288.

28. Determinați toate numerele întregi x cu proprietatea că $x + 1$ divide $2x + 5$.

29. Determinați toate numerele întregi x cu proprietatea că $|x| > 3$ și $|x + 1| \leq 6$.

30. Determinați toate perechile ordonate de numere întregi (x, y) cu proprietatea că $xy + x + y = 4$.

TEMA 2. Numere raționale

1. Calculați:

a) $2{,}25 + 3{,}75 - 5$; b) $4 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot (-0{,}2)$;

c) $1{,}4 \cdot 1{,}5 - 4{,}1$; d) $4{,}35 : 0{,}15 - 140 \cdot 0{,}2$;

e) $\frac{1}{12} - \frac{1}{18} - \frac{1}{9}$; f) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{12}{5}$;

g) $15 \cdot \left(0{,}5 - \frac{1}{6} + 0{,}6\right)$; h) $[0{,}5 + 0{,}(3)] : \left[1{,}1(6) - \frac{1}{6}\right]$.

2. Determinați numărul natural n în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) fracția $\frac{2n+1}{n+4}$ este subunitară; b) fracția $\frac{2n}{n+3}$ este echiunitară; c) fracția $\frac{n+13}{3n+1}$ este supraunitară.

3. Determinați opusul, inversul și modulul numărului rațional $a = -1{,}25$.

4. Stabiliți care dintre următoarele numere raționale se pot reprezenta sub formă de fracție zecimală finită (cu un număr finit de zecimale nenule): $\frac{6}{15}, \frac{11}{2}, \frac{5}{7}, \frac{13}{24}, \frac{8}{15}, \frac{2}{3}, \frac{1}{625}$.

5. a) Ordonați crescător următoarele numere raționale: $-\frac{1}{2}; 1{,}1(3), -0{,}(4); 1{,}7; \frac{4}{3}; -\frac{5}{4}$.

b) Ordonați descrescător următoarele numere raționale: 0,33; 0,(3); 0,3(2); 0,(32); 0,2(3); 0,3.

6. Aflați partea întreagă și partea fracționară ale numerelor $a = \frac{23}{4}$ și $b = -\frac{9}{5}$.

7. Se consideră mulțimea $A = \left\{-\frac{23}{3}; -7; -3{,}4;\ 0{,}5;\ 1{,}(2);\ 2;\ 5\right\}$. Determinați mulțimile $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

8. Fie numerele raționale $a = 30 - 5 \cdot [40 : (-8) - 2 \cdot (5 - 10)]$ și $b = 3 - 6 \cdot \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{7}\right) : \left(-\frac{22}{7}\right)\right]$. Arătați că $a = 5b$.

9. Se consideră numărul $a = \frac{360}{59} \cdot \left(\frac{1}{45} + \frac{7}{60} + \frac{1}{40}\right)$. Calculați $(a - 2)^{10}$.

10. Fie $a = \left[\frac{1}{30} + \frac{1}{19} \cdot \left(0{,}(6) + 0{,}6\right)\right] : 0{,}01$. Arătați că a este un număr natural.

11. Se consideră numărul rațional $a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10}$. Arătați că $0{,}8 < a < 1$.

TEMA 7. Ecuații. Sisteme de ecuații. Inecuații

1. a) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „3 este soluție a ecuației $6 - x = 1$, $x \in \mathbb{N}$”.

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „–2 este soluție a ecuației $x + 3 = 1$, $x \in \mathbb{N}$”.

2. Rezolvați ecuațiile:

a) $x + 1 = 7$, $x \in \mathbb{N}$;
b) $x - 2 = -3$, $x \in \mathbb{Z}$;
c) $3{,}25 + x = 1{,}65$, $x \in \mathbb{Q}$;
d) $13{,}2 - x = 0{,}65$, $x \in \mathbb{Q}$;
e) $x \cdot 3 = -6$, $x \in \mathbb{Z}$;
f) $(-8) : x = -4$, $x \in \mathbb{Z}$;
g) $x : 1{,}1 = 3$, $x \in \mathbb{R}$;
h) $1{,}2 : x = 3$, $x \in \mathbb{Q}$.

3. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

a) $\dfrac{3x-1}{4} - \dfrac{5x-2}{7} = \dfrac{3}{14}$;
b) $2(x + 2)^2 - (x - 1)^2 = x(x - 3) - 6$;
c) $\dfrac{2x+1}{3x-2} = \dfrac{2x+5}{3x+1}$;
d) $\dfrac{2x-1}{6x-3} = \dfrac{4x+4}{12x-5}$;
e) $\dfrac{1}{2x-2} + \dfrac{1}{3x-3} + \dfrac{1}{6x-6} = \dfrac{1}{x-1}$;
f) $(x + 2)^2 + \dfrac{x^2-9}{x+3} = (x - 1)(x + 1) - 13$.

4. Considerăm $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $\begin{cases}(a-1)x+(b+1)(y+1)=-5\\ 2a(x+1)-(2b-1)y=22\end{cases}$.

a) Determinați x și y dacă $a = 2$, $b = -3$.
b) Determinați a și b dacă $x = 1$, $y = 2$.

5. a) Care dintre elementele mulțimii $\left\{-1, 1, \dfrac{3}{2}\right\}$ este soluție a inecuației $x - 1{,}25 > 0$, $x \in \mathbb{R}$?

b) Care dintre elementele mulțimii $\{-3, 1, 2, 3\}$ nu este soluție a inecuației $2x^2 - 1 < 17$, $x \in \mathbb{R}$?

6. Rezolvați inecuațiile:

a) $x - 1 < 3$, $x \in \mathbb{N}$;
b) $5x > 30{,}15$, $x \in \mathbb{Z}$;
c) $-1{,}2x + 0{,}8 < -1{,}6$, $x \in \mathbb{Z}$;
d) $2x - 3 > 1 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$;
e) $6 - 2x < 4$, $x \in \mathbb{R}$;
f) $\dfrac{x}{3} + 1 > x + \dfrac{1}{2}$, $x \in \mathbb{N}$.

7. Fie a număr real și inecuația $\dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{x}{2} \le \dfrac{a-1}{6}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valorile lui a pentru care $x = 1$ este soluție a inecuației.
b) Determinați numerele naturale x care verifică inecuația pentru $a = 6$.

8. a) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $\dfrac{4x}{3x+1}$ este număr întreg.

b) Arătați că există o infinitate de numere raționale x, pentru care numărul $\dfrac{4x}{3x+1}$ este întreg.

9. După trei note primite la matematică, media aritmetică a notelor unui elev este 7.
a) Dacă a patra notă este 5, care este media aritmetică a primelor patru note?
b) Dacă media primelor patru note este 7,50, care este a patra notă primită de elev?

10. Un televizor costă 1540 de lei. Prețul televizorului se mărește cu 25%.
a) Cât costă televizorul după mărirea de preț?
b) Cu ce procent trebuie micșorat noul preț pentru ca televizorul să aibă același preț ca înainte de mărire?

23. Trei frați au împreună 180 de lei. După ce primul a cheltuit $\frac{1}{2}$ din suma sa, al doilea $\frac{2}{3}$ din suma sa, iar al treilea $\frac{3}{4}$ din suma sa, cei trei au rămas cu sume egale de bani. Notăm cu a, b, c (lei) sumele de bani pe care le aveau, la început, primul, al doilea, respectiv al treilea copil.

a) Arătați că a, b, c sunt direct proporționale cu 2, 3 și 4.

b) Ce sumă de bani avea fiecare copil la început?

24. Numerele 319, 945 și 333, împărțite la un număr natural n, dau resturile 7, 9 și, respectiv, 8.

a) Stabiliți dacă n poate fi egal cu 12.

b) Determinați numărul n.

25. Împărțind numărul natural n la numerele 18, 30 și 24, se obțin câturi nenule și de fiecare dată restul 2.

a) Aflați cel mai mic număr n cu această proprietate.

b) Aflați toate numerele n cu această proprietate, astfel încât $1500 < n < 2500$.

26. Într-un coș se află nuci. Dacă le grupăm câte 2, câte 3 sau câte 5, de fiecare dată rămâne o nucă, iar dacă le grupăm câte 7, nu mai rămâne nicio nucă.

a) Pot fi în coș 301 nuci?

b) Care este numărul minim de nuci din coș?

27. Într-o clasă sunt băieți și fete. Dacă ar mai veni 8 fete, numărul lor ar fi $\frac{2}{3}$ din numărul băieților. Dacă ar pleca n băieți, numărul fetelor ar fi tot $\frac{2}{3}$ din numărul băieților.

a) Determinați numărul n.

b) Arătați că sunt cel puțin 12 băieți în clasă.

28. Un amestec de apă și sare cântărește 10 kg și are concentrația de 5%.

a) Ce cantitate de sare conține amestecul?

b) Ce cantitate de sare trebuie adăugată pentru a obține un amestec cu concentrația de 20%?

c) Dacă s-ar adăuga 30 kg de amestec de apă cu sare, cu concentrația de 10%, care ar fi concentrația noului amestec?

29. La o disciplină, Ionuț are trei note: 5, 7 și 8.

a) Care este media aritmetică a notelor lui Ionuț?

b) Ce notă ar trebui să mai primească Ionuț pentru ca media să fie cel puțin 7?

30. Un test-grilă conține 100 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte și pentru fiecare răspuns greșit se scad 3 puncte. Se consideră admis un elev care obține cel puțin 200 de puncte.

a) Este admis un elev care răspunde corect la 50 de întrebări?

b) Care este numărul minim de răspunsuri corecte pe care trebuie să le dea un elev pentru a fi admis?

TEMA 8. Unghiuri. Triunghiuri. Patrulatere

1. În figura 1, punctele A, B și C sunt coliniare în această ordine. Se știe că $7AB = 2BC$, iar $AC = 27$ cm. Aflați lungimea segmentului AB.

2. În figura 2, M este un punct situat pe segmentul AB, iar N și P sunt mijloacele segmentelor AM, respectiv MB. Segmentul NP are lungimea de 17 cm. Aflați lungimea segmentului AB.

Figura 1

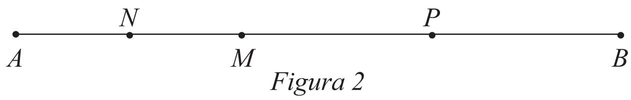


Figura 2

3. În figura 3, semidreptele AM și AN sunt bisectoarele unghiurilor BAC, respectiv MAC. Unghiul MAN are măsura de 20°. Aflați măsura unghiului BAN.

4. În figura 4, $\sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle CAD$ sunt unghiuri adiacente complementare, cu $\sphericalangle BAC = \frac{5}{4} \cdot \sphericalangle CAD$. Aflați măsura unghiului CAD.

5. În figura 5 sunt date măsurile a două dintre unghiurile formate în jurul punctului de intersecție a dreptelor d_1 și d_2. Aflați valoarea lui x.

18. Fie *ABCD* un romb cu $\sphericalangle CAD = 25°$ (figura 18). Determinați măsura unghiului *CBD*.

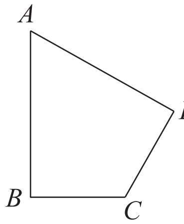


Figura 15

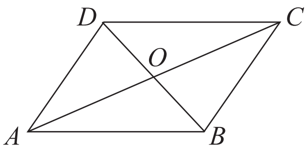


Figura 16

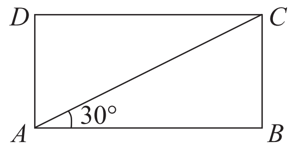


Figura 17

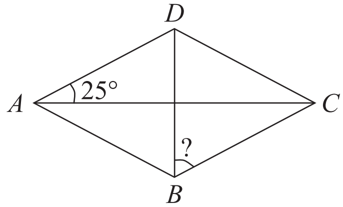


Figura 18

19. Pătratul *ABCD* are latura $AB = 7$ cm (figura 19). Aflați distanța dintre simetricul punctului *A* față de dreapta *BD* și simetricul punctului *D* față de dreapta *AC*.

20. În trapezul isoscel *ABCD*, unghiul *C* are măsura 115° (figura 20). Calculați $\sphericalangle A + \sphericalangle B - \sphericalangle D$.

21. Patrulaterul *ABCD* este un trapez dreptunghic cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $\sphericalangle B = 45°$, $AD = 8$ cm și $CD = 6$ cm (figura 21). Aflați lungimea segmentului *AB*.

22. Linia mijlocie *MN* a trapezului *ABCD* intersectează diagonalele *AC* și *BD* în punctele *P*, respectiv *Q* (figura 22). Determinați lungimile bazelor *AB* și *CD*, dacă $AB > CD$, $MN = 10$ cm și $PQ = 4$ cm.

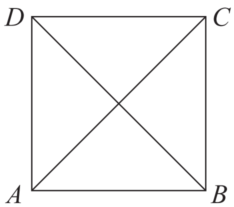


Figura 19

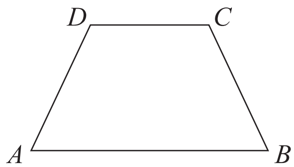


Figura 20

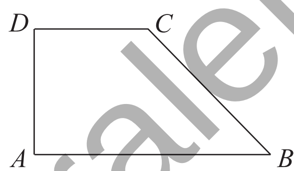


Figura 21

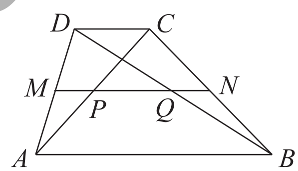


Figura 22

23. Fie *ABC* un triunghi cu $BC = 9$ cm. Notăm cu *P* simetricul punctului *B* față de mijlocul *M* al laturii *AC* (figura 23).
a) Arătați că $AP = 9$ cm.
b) Dacă *Q* este simetricul lui *C* față de mijlocul *N* al laturii *AB*, demonstrați că punctul *A* este mijlocul segmentului *PQ*.

24. În triunghiul *ABC*, unghiurile *B* și *C* au măsurile 50°, respectiv 70°. Pe laturile *BC* și *AB* se consideră punctele *M*, respectiv *N*, astfel încât $\sphericalangle BMA = 100°$ și $\sphericalangle BNC = 120°$ (figura 24).
a) Arătați că $\sphericalangle ACN = 60°$.
b) Demonstrați că dreapta *AM* este mediatoarea segmentului *CN*.

25. Fie *ABC* un triunghi isoscel cu $AB = AC$ și $\sphericalangle B = 2 \cdot \sphericalangle A$. Pe latura *AC* se consideră punctul *M* astfel încât *BM* să fie bisectoare în triunghiul *ABC* (figura 25).
a) Arătați că unghiul *ABM* are măsura 36°.
b) Demonstrați că segmentele *AM* și *BC* sunt congruente.

26. Se consideră triunghiul *ABC* cu $\sphericalangle A = 90°$ și $\sphericalangle B = 5 \cdot \sphericalangle C$, iar punctul *D* este proiecția punctului *A* pe *BC* (figura 26).
a) Arătați că unghiul *CAD* are măsura 75°.
b) Demonstrați că $BC = 4 \cdot AD$.

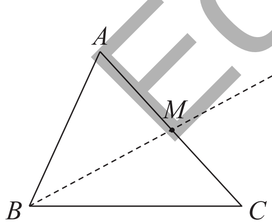


Figura 23

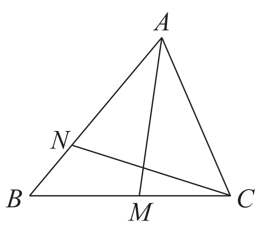


Figura 24

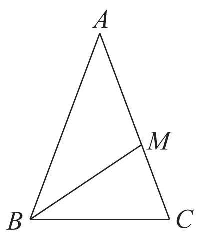


Figura 25

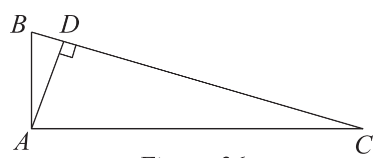


Figura 26

27. Se consideră triunghiul *ABC* cu $AB = AC = 10$ cm, $BC = 7$ cm, iar *D* este piciorul bisectoarei din *A*. Pe laturile *AC* și *AB* se consideră punctele *M*, respectiv *N*, astfel încât $DM \parallel AB$ și $DN \parallel AC$ (figura 27).
a) Aflați lungimea segmentului *BD*.
b) Demonstrați că patrulaterul *AMDN* este un romb și calculați perimetrul său.

28. Postamentul unei statui este construit din beton sub forma trunchiului de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ având $AA' = 3$ m, $AC = 6$ m și $A'C' = 2{,}4$ m (figura 17).
a) Aflați înălțimea postamentului.
b) Demonstrați că la construcția postamentului se folosesc mai mult de 22 m^3 de beton.

29. O foaie de tablă are forma hexagonului regulat $ABCDEF$ cu latura de 60 cm (figura 18). Notăm cu M, N, P mijloacele laturilor AB, CD, respectiv EF și îndoim tabla după dreptele MN, NP și PM. Se obține astfel un vas fără capac, având forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată.
a) Aflați suprafața foii folosite pentru confecționarea vasului.
b) Determinați capacitatea vasului.

30. O lumânare decorativă are forma unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ (figura 19). Se știe că 13 cm^3 de materialul din care este făcută lumânarea cântăresc 10 g. Muchiile bazelor trunchiului sunt $AB = 15$ cm și $A'B' = 6$ cm, iar înălțimea sa este $OO' = 9$ cm. Arătați că masa lumânării este mai mică de 405 g.

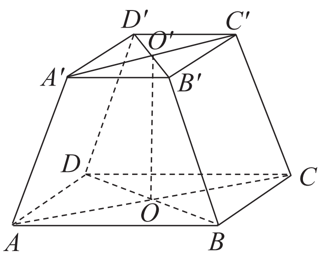


Figura 16

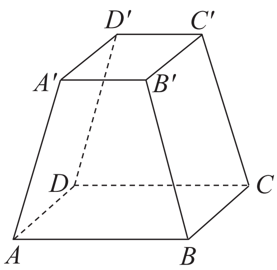


Figura 17

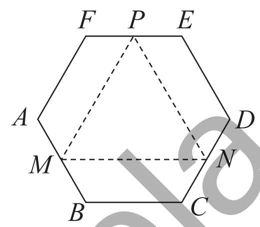


Figura 18

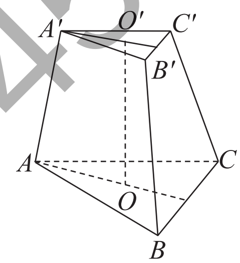


Figura 19

TEMA 14. Corpuri rotunde

1. Pătratul $ABCD$, cu $AB = 10$ cm, este secțiunea axială a unui vas cilindric circular drept (figura 1). Se toarnă în vas 157 ml de apă. Determinați înălțimea la care se ridică apa. (Se va considera valoarea aproximativă $\pi = 3{,}14$.)
2. Un cilindru metalic are raza de 6 cm și înălțimea de 25 cm (figura 1). Se cunoaște că 3 cm^3 de metal cântăresc 5 g. Arătați că masa cilindrului este mai mare de 4,7 kg.
3. O piesă metalică are forma unui cilindru circular drept având diametrul bazei de 14 cm și generatoarea de 12,5 cm (figura 1). Se vopsește suprafața laterală a piesei utilizând câte trei grame de vopsea la fiecare 5 cm^2 de suprafață.
a) Arătați că 330 g vopsea sunt suficiente pentru a vopsi piesa.
b) Se scufundă piesa într-un vas mai mare, plin cu apă. Demonstrați că din vas vor curge mai puțin de 2 ℓ de apă.
(Se va utiliza valoarea aproximativă $\pi = 3\frac{1}{7}$.)
4. În figura 2, dreptunghiul AA_1D_1D, cu $AA_1 = 12$ dm și $AD = 10$ dm reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru.
a) Aflați aria laterală a cilindrului.
b) Determinați volumul cilindrului.
5. O doză de suc are forma unui cilindru circular drept cu volumul egal cu 90π cm^3 și generatoarea de 10 cm (figura 3). Dreptunghiul $ABCD$ este o secțiune axială a cilindrului, iar E este un punct pe segmentul BC, astfel încât $CE = 3$ cm.
a) Aflați lungimea razei bazei.
b) O furnică se deplasează pe suprafața laterală a dozei, din punctul A în punctul E, pe un drum de lungime minimă. Demonstrați că lungimea drumului este mai mică de 12 cm.
6. O piesă din lemn având forma unui cilindru circular drept cu $\mathcal{A}_l = 560\pi$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 760\pi$ cm^2 se cioplește, transformându-se într-o prismă patrulateră regulată $ABCDA_1B_1C_1D_1$, cu pierderi minime de material (figura 4).
a) Aflați lungimea generatoarei cilindrului.
b) Determinați volumul de lemn pierdut prin cioplire.
(Se va utiliza valoarea aproximativă $\pi = \frac{22}{7}$.)

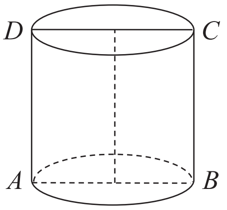


Figura 1

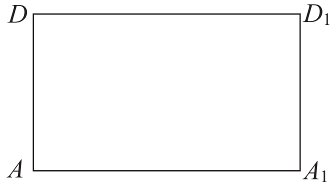


Figura 2

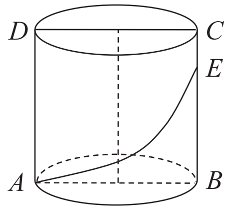


Figura 3

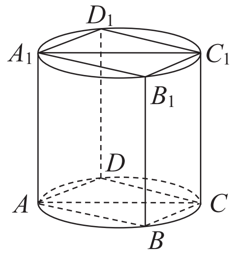


Figura 4

7. Triunghiul echilateral *VAB* este o secțiune axială a unui con circular drept (figura 5). Aria triunghiului *VAB* este $9\sqrt{3}$ cm^2. Aflați aria laterală a conului.

8. Un comerciant vinde popcorn în cornete de hârtie având formă de con circular drept cu generatoarea $VA = 12{,}5$ cm și înălțimea $VO = 12$ cm (figura 6).

a) Aflați numărul maxim de cornete care pot fi confecționate dintr-un metru pătrat de hârtie.

b) Se știe că 56 cm^3 de popcorn cântăresc 40 g. Aflați masa unui cornet plin.

(Se va considera valoarea aproximativă $\pi = 3\frac{1}{7}$.)

9. Prin înfășurarea unei foi de tablă având forma unui sector de disc cu unghiul la centru $\alpha = 120°$ se obține un vas în formă de con circular drept cu înălțimea de 20 cm (figura 7).

a) Aflați raza bazei conului.
b) Stabiliți dacă încape 1 litru de apă în vasul obținut.

10. În figura 8 este reprezentată o pâlnie așezată pe o masă orizontală. Triunghiul *VAB* este o secțiune axială a conului, raza bazei conului este de 6 cm și aria laterală este egală cu 72π cm^2.

a) Arătați că înălțimea pâlniei este mai mică decât 10,5 cm.

b) O furnică se deplasează din punctul *A* în punctul *B* pe suprafața laterală. Aflați lungimea minimă a drumului furnicii.

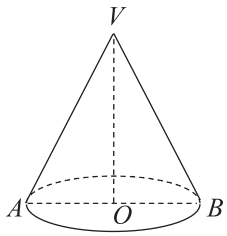


Figura 5

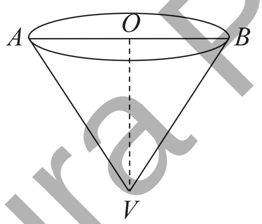


Figura 6

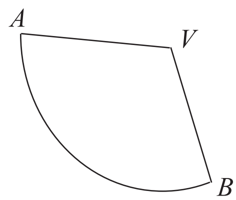


Figura 7

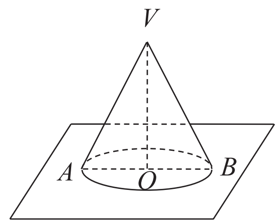


Figura 8

11. Pentru a vopsi un con din lemn, avem nevoie de 459 g de vopsea. La o treime din înălțime față de vârf se realizează o secțiune paralelă cu planul bazei. Ce cantitate de vopsea este necesară pentru a acoperi conul mic format?

12. Un con circular drept din lemn are $\mathcal{A}_l = 135\pi$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 216\pi$ cm^2 (figura 5).

a) Aflați înălțimea conului.

b) Secționăm conul printr-un plan paralel cu planul bazei, astfel încât volumul trunchiului obținut să fie de 7 ori mai mare decât volumul conului mic. La ce distanță de planul bazei se realizează secțiunea?

13. O găleată are forma unui trunchi de con circular drept, cu razele bazelor $r = 15$ cm, $R = 20$ cm și înălțimea $h = 36$ cm (figura 9). Poate fi umplută găleata, într-un minut, de un robinet care are debitul de 0,5 ℓ/s?

14. Un pahar de unică folosință are forma unui trunchi de con circular drept cu raza bazei mari $R = 5{,}5$ cm, înălțimea $h = 12$ cm și generatoarea $g = 12{,}5$ cm (figura 10).

a) Aflați raza bazei mici a trunchiului.
b) Stabiliți dacă încap în pahar 500 ml de suc.

15. Un buștean are forma unui trunchi de con circular drept, iar trapezul isoscel *ABCD* este o secțiune axială a sa (figura 11). Generatoarea are lungimea de 12 dm și formează cu planul bazei mari un unghi cu măsura de 60°. Diametrul bazei mici este $DC = 4$ dm.

a) Arătați că înălțimea bușteanului este mai mică de 11 dm.

b) Determinați la ce distanță de planul bazei mici se întâlnesc generatoarele *AD* și *BC*.

MODELE DE TESTE PENTRU

EVALUAREA NAȚIONALĂ

✦ TESTUL 1 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Cel mai mare număr natural care împărțit la 7 dă câtul 10 este egal cu:
a) 70; **b)** 71; **c)** 76; **d)** 77.

(5p) **2.** Un telefon, care costă 1000 de lei, se ieftinește cu 10%, iar noul preț se mărește cu 10%. Diferența dintre prețul inițial și prețul final al telefonului este egală cu:
a) 0 lei; **b)** 1 leu; **c)** 10 lei; **d)** 20 de lei.

(5p) **3.** Diferența dintre cel mai mic și cel mai mare număr întreg din intervalul $(-3, 5]$ este egală cu:
a) -8; **b)** -7; **c)** -6; **d)** 2.

(5p) **4.** Dintre următoarele șiruri de numere, cel scris în ordine crescătoare este:
a) $\frac{2}{3}; 0,5; \frac{5}{6}; 0,75;$ **b)** $\frac{5}{6}; 0,5; 0,75; \frac{2}{3};$ **c)** $0,5; 0,75; \frac{2}{3}; \frac{5}{6};$ **d)** $0,5; \frac{2}{3}; 0,75; \frac{5}{6}.$

(5p) **5.** Patru elevi, Ana, Bogdan, Cristi și Dana, au calculat rădăcina pătrată a produsului numerelor $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{8}$ și $\sqrt{15}$. Rezultatele obținute de ei sunt trecute în tabelul următor:

Ana	Bogdan	Cristi	Dana
$2\sqrt{15}$	$10\sqrt{6}$	60	3600

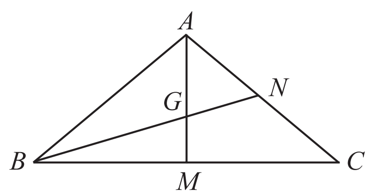
Dintre cei patru elevi, cel care a obținut rezultatul corect este:
a) Ana; **b)** Bogdan; **c)** Cristi; **d)** Dana.

(5p) **6.** Teodor a parcurs într-o zi 24 km, adică $\frac{3}{5}$ din drumul pe care trebuia să-l străbată. Sora lui Teodor spune că lungimea totală a drumului pe care îl avea de parcurs Teodor este de 40 km. Afirmația surorii este:
a) adevărată; **b)** falsă.

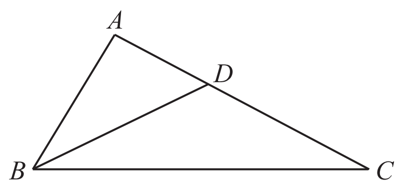
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, coliniare, în această ordine. Punctul M este mijlocul segmentului AB, iar punctul N se află pe segmentul BC, astfel încât $BN = 2NC$. Dacă $AB = 6$ cm și $BC = 12$ cm, atunci lungimea segmentului MN este egală cu:
a) 6 cm; **b)** 9 cm;
c) 11 cm; **d)** 15 cm.

(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB = AC = 10$ cm și $BC = 16$ cm. Medianele AM și BN se intersectează în punctul G. Lungimea segmentului AG este egală cu:
a) 10 cm; **b)** 8 cm;
c) 6 cm; **d)** 4 cm.

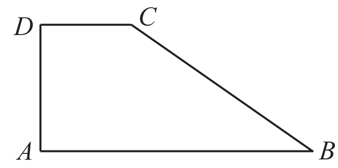


(5p) **3.** În figura alăturată este desenat un triunghi ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle C = 30°$ și $AC = 6\sqrt{3}$ cm. Dacă BD este bisectoarea unghiului ABC, atunci lungimea segmentului AD este egală cu:
a) $2\sqrt{3}$ cm; **b)** $3\sqrt{3}$ cm;
c) $4\sqrt{3}$ cm; **d)** $5\sqrt{3}$ cm.



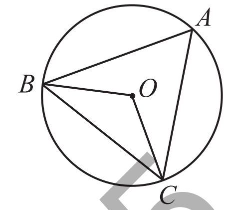
5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, $AB = 6$ m, $BC = 5$ m și $CD = 2$ m. Aria trapezului $ABCD$ este egală cu:

a) 40 m^2; **b)** 24 m^2;
c) 12 m^2; **d)** 6 m^2.



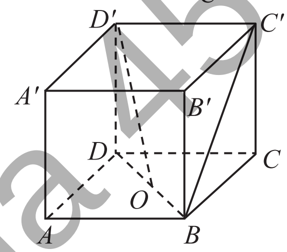
(5p) **5.** În figura alăturată este desenat triunghiul ABC înscris în cercul cu centrul în O. Dacă $\sphericalangle BOC = 150°$, atunci măsura unghiului BAC este egală cu:

a) 90°; **b)** 75°;
c) 60°; **d)** 45°.



(5p) **6.** În figura alăturată este desenat cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctul O este mijlocul segmentului BD. Măsura unghiului determinat de dreptele BC' și $D'O$ este egală cu:

a) 15°; **b)** 30°;
c) 45°; **d)** 60°.



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Un biciclist a parcurs un drum în trei zile. În prima zi, el a parcurs cu 5 km mai puțin decât $\frac{1}{3}$ din lungimea drumului, a doua zi cu 15 km mai mult decât $\frac{1}{3}$ din rest, iar a treia zi ultimii 55 km.

(2p) **a)** Este posibil ca biciclistul să fi parcurs în prima zi 13 km? Justifică răspunsul dat.

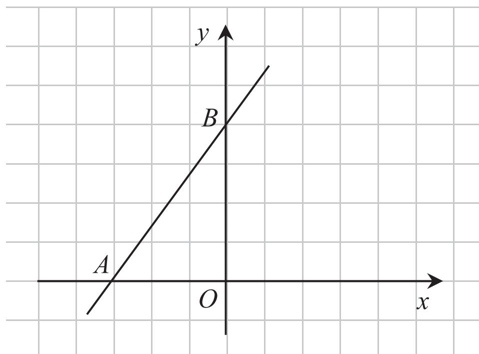
(3p) **b)** Determină lungimea totală a drumului.

2. Se consideră expresia $E(x) = (x-1) \cdot \left(\dfrac{x-2}{x-1} - \dfrac{x}{x+2}\right) - \dfrac{2x-4}{4-x^2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) + \dfrac{4}{x+2} = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$.

(3p) **b)** Determină numerele întregi n, pentru care $E(n)$ este număr întreg.

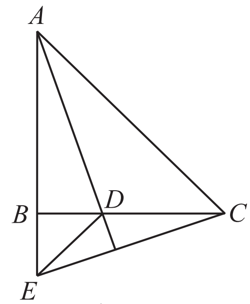
3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x+12}{3}$. Fie A și B punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy, ale sistemului de axe ortogonale xOy.



(2p) **a)** Determină coordonatele punctelor A și B.

(3p) **b)** Determină coordonatele punctului P, situat pe reprezentarea grafică a funcției f, astfel încât $AB = BP$, $P \neq A$.

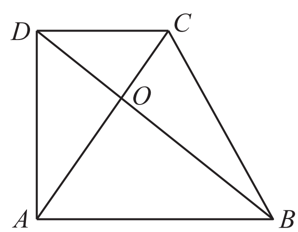
4. În figura alăturată sunt reprezentate triunghiurile dreptunghice isoscele ABC și DBE, cu $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DBE = 90°$, punctul D fiind situat pe BC. Se știe că $BC = 3BD = 12$ cm.



(2p) **a)** Calculează aria triunghiului ADC.

(3p) **b)** Demonstrează că dreptele AD și EC sunt perpendiculare.

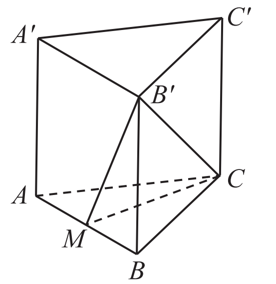
5. În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$, cu baza mare $AB = 16$ cm, baza mică $CD = 9$ cm și înălțimea $AD = 12$ cm. Diagonalele trapezului se intersectează în punctul O.



(2p) **a)** Calculează lungimea segmentului AO.

(3p) **b)** Demonstrează că diagonalele trapezului sunt perpendiculare.

6. În figura alăturată este reprezentată prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = 12$ cm și $BB' = 8$ cm. Punctul M este mijlocul laturii AB.



(2p) **a)** Calculează aria triunghiului CMB'.

(3p) **b)** Determină distanța de la punctul A la planul (CMB').

✦ TESTUL 37 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului 12 – 12 : (–4) este egal cu:
a) 15; **b)** 9; **c)** 6; **d)** 0.

(5p) **2.** Dacă $\frac{5}{2x-3}=\frac{3}{y}$, atunci rezultatul calculului $6x-5y$ este:
a) 3; **b)** 5; **c)** 7; **d)** 9.

(5p) **3.** Diferența dintre opusul numărului 2 și inversul numărului $\frac{1}{2}$ este egală cu:
a) $-\frac{5}{2}$; **b)** 0; **c)** –4; **d)** 4.

(5p) **4.** Scris sub formă de fracție ordinară, numărul 1,(2) este egal cu:
a) $\frac{2}{9}$; **b)** $\frac{11}{90}$; **c)** $\frac{11}{9}$; **d)** $\frac{6}{5}$.

(5p) **5.** Patru elevi, Ana, Bogdan, Carmen și Dan, au calculat raportul $\frac{a}{b}$, unde $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ și $b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.
Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

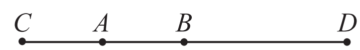
Ana	**Bogdan**	**Carmen**	**Dan**
5	$5+2\sqrt{6}$	$5-2\sqrt{6}$	1

Conform informațiilor din tabel, rezultatul corect a fost obținut de:
a) Ana; **b)** Bogdan; **c)** Carmen; **d)** Dan.

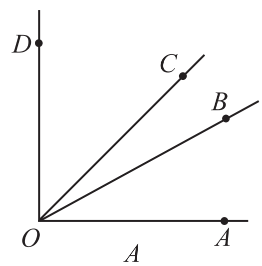
(5p) **6.** Două caiete și 6 pixuri costă împreună 48 de lei. Afirmația „Trei pixuri și un caiet, de același fel, costă împreună 24 de lei.” este:
a) adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

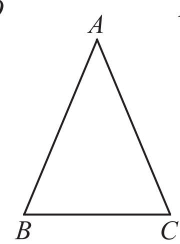
(5p) **1.** În figura alăturată este reprezentat segmentul *AB* cu lungimea de 4 cm. Punctul *C* este simetricul lui *B* față de punctul *A*, iar punctul *D* se află pe semidreapta *AB* astfel încât *BD* = 3*AB*. Lungimea segmentului *CD* este egală cu:
a) 12 cm; **b)** 16 cm;
c) 20 cm; **d)** 24 cm.



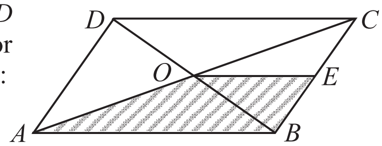
(5p) **2.** În figura alăturată, unghiurile *AOB* și *BOD* sunt adiacente complementare. Semidreapta *OC* este bisectoarea unghiului *AOD*, iar măsura unghiului *AOB* este jumătate din măsura unghiului *BOD*. Măsura unghiului *BOC* este egală cu:
a) 15°; **b)** 20°;
c) 30°; **d)** 45°.



(5p) **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel *ABC* cu *AB* = *AC* = 4 cm și măsura unghiului *B* de 67°30'. Aria triunghiului *ABC* este egală cu:
a) $4\sqrt{2}$ cm²; **b)** $4\sqrt{3}$ cm²;
c) 8 cm²; **d)** $8\sqrt{3}$ cm².

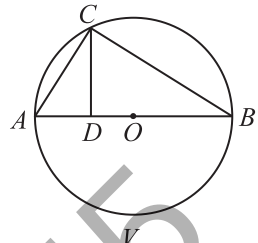


(5p) **4.** Figura alăturată reprezintă schița unui teren în formă de paralelogram $ABCD$ cu suprafața de 24 ha. Dacă O este punctul de intersecție a diagonalelor AC și BD, iar E este mijlocul laturii BC, atunci aria trapezului $ABEO$ este:



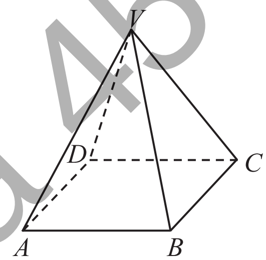
a) 6 ha; **b)** 9 ha;
c) 10 ha; **d)** 12 ha.

(5p) **5.** Punctele A, B și C sunt situate pe un cerc de centru O, astfel încât punctele A și B sunt diametral opuse și măsura arcului mic AC este egală cu 80°. Dacă punctul D este piciorul perpendicularei din C pe AB, atunci măsura unghiului ACD este egală cu:



a) 80°; **b)** 60°;
c) 40°; **d)** 30°.

(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu baza pătratul $ABCD$. Dacă triunghiul VAB este echilateral și $AB = 6$ cm, atunci aria totală a piramidei este egală cu:



a) $36\sqrt{3}$ cm^2; **b)** $9(4+\sqrt{3})$ cm^2;
c) $36(1+\sqrt{3})$ cm^2; **d)** $6(6+\sqrt{3})$ cm^2.

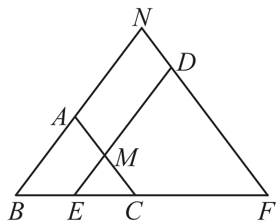
SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Într-o școală sunt 528 de elevi, băieți și fete.
(2p) **a)** Dacă în școală sunt 88 de fete, află cât la sută din numărul băieților reprezintă numărul fetelor.
(3p) **b)** Dacă 60% din numărul băieților înseamnă 50% din numărul fetelor, află câți băieți și câte fete sunt în școală.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\dfrac{x^2}{x^2+x} - \dfrac{x}{x-x^2} - \dfrac{x+1}{x^3+x^2-x-1}\right) \cdot \left(x - \dfrac{1}{x}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
(2p) **a)** Arată că $x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)^2(x-1)$, pentru orice număr real x.
(3p) **b)** Demonstrează că $E(4x^2 + 9) - 12E(x) \geq 0$, oricare ar fi numărul real unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

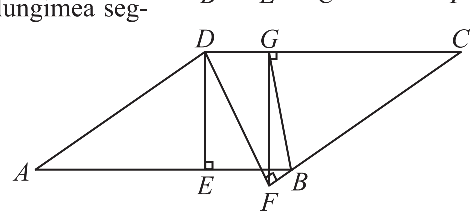
3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.
(2p) **a)** Arată că produsul $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot f\left(\dfrac{1}{3}\right) \cdot f\left(\dfrac{1}{4}\right) \cdot f\left(\dfrac{1}{5}\right)$ este un număr natural.
(3p) **b)** Calculează lungimea segmentului AB, unde A și B sunt punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele de coordonate Ox, respectiv Oy, ale sistemului de axe ortogonale xOy.

4. În figura alăturată sunt reprezentate triunghiurile dreptunghice isoscele ABC și DEF, cu ipotenuzele BC și EF situate pe aceeași dreaptă. Segmentele AC și DE se intersectează în punctul M, iar dreptele AB și DF se intersectează în punctul N.



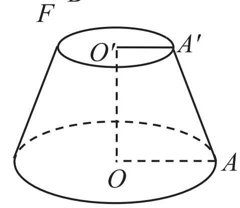
(2p) **a)** Arată că patrulaterul $AMDN$ este dreptunghi.
(3p) **b)** Dacă $BC = 16$ cm, $EF = 18$ cm și $CE = 10$ cm, determină lungimea segmentului MN.

5. În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm și înălțimea $DE = 3$ cm, $E \in (AB)$.



(2p) **a)** Arată că $DF = 4$ cm, unde $DF \perp BC$, $F \in BC$.
(3p) **b)** Dacă $FG \perp CD$, $G \in CD$, demonstrează că semidreapta BG este bisectoarea unghiului ABC.

6. În figura alăturată este reprezentat un trunchi de con circular drept cu raza bazei mari $OA = 6$ cm, raza bazei mici $O'A' = 2$ cm și înălțimea $OO' = 3$ cm.



(2p) **a)** Arată că volumul trunchiului este egal cu 52π cm^3.
(3p) **b)** Calculează aria totală a trunchiului de con.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Maria are 80 de bile albe sau roșii. Dorind să aibă numai bile albe, ea face schimb cu prietena sa, Ana, care oferă 3 bile albe pentru 7 bile roșii. După schimb, Maria are 56 de bile, toate albe.

(2p) **a)** Poate avea Maria 24 de bile albe inițial?

(3p) **b)** Câte bile albe a avut Maria la început?

2. Se consideră expresia $E(x) = \dfrac{(x+1)^2 - x^2 - 5}{x^3 + 3x^2 + 2x} : \left(\dfrac{3}{x^2 + x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 2\}$.

(2p) **a)** Arată că $E(x) = \dfrac{2x}{x+2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 2\}$.

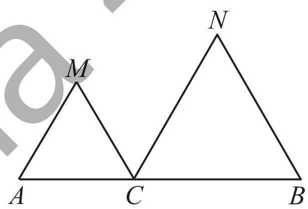
(3p) **b)** Stabilește dacă există numere întregi n pentru care $E(n) < 0$.

3. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică condiția: $f(1 - x) = 3x - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(2p) **a)** Arată că $f(-1) = 5$.

(3p) **b)** Determină coordonatele punctului situat pe reprezentarea grafică a funcției f, în sistemul de axe ortogonale xOy, care are coordonatele egale.

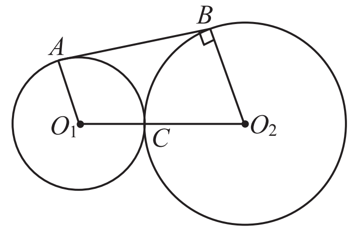
4. Pe segmentul AB cu lungimea de 6 cm considerăm punctul C astfel încât AC = 2 cm. De aceeași parte a dreptei AB construim triunghiurile echilaterale MAC și NCB.



(2p) **a)** Calculează aria triunghiului MCN.

(3p) **b)** Dacă P este mijlocul segmentului MN, arată că dreptele AM, BN și CP sunt concurente.

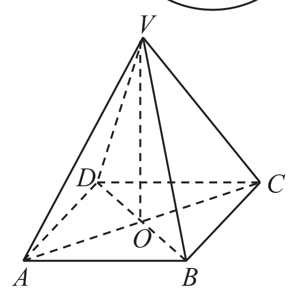
5. În figura alăturată cercurile $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ sunt tangente exterior în punctul C, $r_1 = 4$ cm și $r_2 = 9$ cm. Dreapta AB este tangentă cercului $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ în A și cercului $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ în B.



(2p) **a)** Arată că $AB = 12$ cm.

(3p) **b)** Demonstrează că $AC \perp BC$.

6. În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$, de înălțime VO. Se știe că $VB = 3\sqrt{3}$ cm și $VO = 3$ cm.



(2p) **a)** Arată că $AB = 6$ cm.

(3p) **b)** Calculează distanța de la vârful A la planul (VBC).

✦ TESTUL 85 ✦

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $4 - 6 : (4 - 6)$ este egal cu:

a) 1; **b)** –8; **c)** 7; **d)** 16.

(5p) **2.** Ionuț are 120 de lei. După ce cumpără o carte cu 30% din suma avută, suma de bani care îi rămâne este egală cu:

a) 36 de lei; **b)** 94 de lei; **c)** 90 de lei; **d)** 84 de lei.

(5p) **3.** Mulțimea numerelor naturale n pentru care numărul $\dfrac{18}{2n-3}$ este natural este:

a) $\{1, 2, 3\}$; **b)** $\{0, 1, 2\}$; **c)** $\{2, 3, 6\}$; **d)** $\{1, 3, 6\}$.

(5p) **4.** Media aritmetică a numerelor $8+2\sqrt{12}$ și $8-\sqrt{48}$ este egală cu:
a) 8; **b)** 16; **c)** 4; **d)** 2.

(5p) **5.** În tabelul următor sunt prezentate rezultatele unui grup de 20 de elevi la un test de matematică.

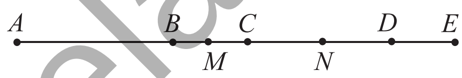
Nr. elevi	3	2	4	2	5	1	3
Nr. puncte obținute	72	91	87	37	64	93	42

Cel mai mic punctaj obținut este mai mic decât cel mai mare punctaj obținut cu:
a) 52 de puncte; **b)** 54 de puncte; **c)** 56 de puncte; **d)** 51 de puncte.

(5p) **6.** Maria afirmă: „Dintre numerele: $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ și $\frac{3}{4}$, cel mai mare număr este $\frac{5}{6}$". Afirmația Mariei este:
a) adevărată; **b)** falsă.

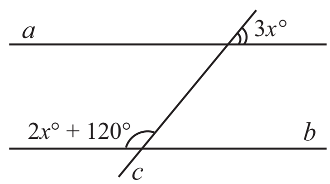
SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 de puncte)**

(5p) **1.** În figura alăturată, punctele A, B, C, D și E sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $AC = BD = CE$. Punctul M este mijlocul segmentului BC, punctul N este mijlocul segmentului CD și $NC = 2MC$. Valoarea raportului $\frac{AD}{AE}$ este:



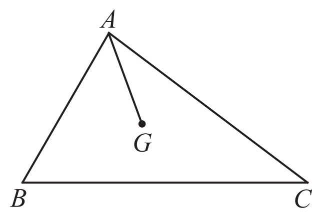
a) $\frac{4}{3}$; **b)** $\frac{6}{5}$;
c) $\frac{5}{6}$; **d)** 2.

(5p) **2.** În figura alăturată, dreptele a și b sunt paralele, iar dreapta c este secantă. Folosind datele din figură, valoarea lui x este:



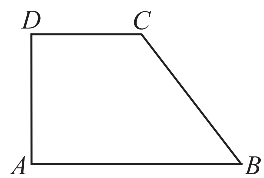
a) 11; **b)** 12;
c) 13; **d)** 14.

(5p) **3.** În figura alăturată, triunghiul ABC este dreptunghic având ipotenuza BC, iar G este centrul de greutate. Valoarea raportului $\frac{AG}{BC}$ este:



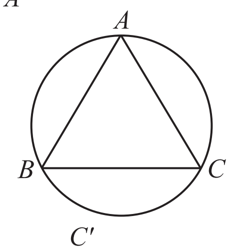
a) $\frac{1}{6}$; **b)** $\frac{1}{2}$;
c) $\frac{1}{4}$; **d)** $\frac{1}{3}$.

(5p) **4.** În figura alăturată, $ABCD$ este un trapez dreptunghic, $AB = 9$ cm, $CD = 4$ cm și $BC = 13$ cm. Aria trapezului $ABCD$ este egală cu:



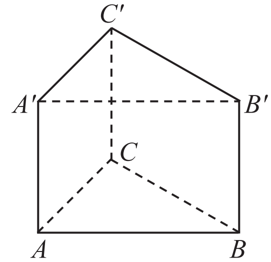
a) 78 cm^2; **b)** 72 cm^2;
c) 156 cm^2; **d)** 39 cm^2.

(5p) **5.** Triunghiul echilateral ABC este înscris în cercul de diametru $2\sqrt{3}$ cm. Perimetrul triunghiului este egal cu:



a) 3 cm; **b)** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm;
c) 6 cm; **d)** 9 cm.

(5p) **6.** O prismă triunghiulară regulată dreaptă are toate muchiile egale, iar volumul este egal cu $2\sqrt{3}$ cm^3. Suma tuturor muchiilor prismei este egală cu:



a) 6 cm; **b)** 9 cm;
c) 12 cm; **d)** 18 cm.

SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

1. Un autobuz pleacă dintr-un punct A, trece prin câteva stații și se întoarce în A. La plecare, în punctul A, urcă câțiva călători. Aceștia au plătit împreună, pentru bilete, 72 de lei. Apoi, în fiecare nouă stație, urcă 10 călători și coboară 7. Prețul biletului este același pentru fiecare călător. Se știe că, la întoarcere în punctul A, în autobuz sunt 44 de călători, iar costul total al biletelor plătite de toți călătorii este 1152 de lei.

(2p) **a)** Prețul unui bilet poate fi 6 lei?

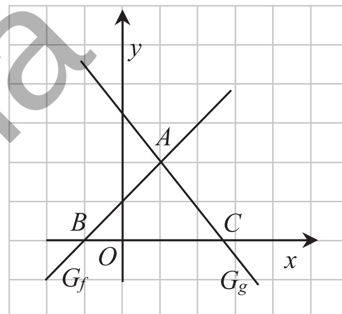
(3p) **b)** Câte persoane au călătorit cu autobuzul?

2. Notăm cu A mulțimea numerelor naturale de două cifre care pot fi scrise ca produsul a două numere naturale consecutive.

(2p) **a)** Arată că, pentru orice $x > 0$, $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+...+\frac{1}{(x+7)(x+8)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+8}$.

(3p) **b)** Calculează suma inverselor elementelor mulțimii A.

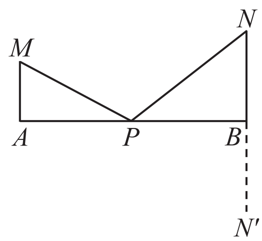
3. Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ și $g(x) = 2+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ și sistemul de axe ortogonale xOy.



(2p) **a)** Arată că punctul $A(1, 2)$ este punct comun al reprezentărilor grafice ale funcțiilor f și g.

(3p) **b)** Reprezentarea grafică a funcției f intersectează axa Ox în punctul B, iar reprezentarea grafică a funcției g intersectează axa Ox în punctul C. Află măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

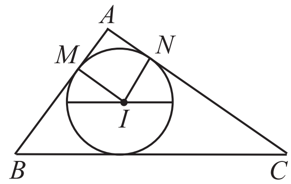
4. În figura alăturată sunt reprezentate triunghiurile MAP și NBP, cu $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$, $P \in (AB)$, $MA = 30$ cm, $NB = 90$ cm, $AB = 50$ cm. Fie N' simetricul punctului N față de drepata AB.



(2p) **a)** Arată că $PN = PN'$.

(3p) **b)** Calculează lungimea minimă a sumei $MP + PN$, când punctul P se deplasează pe segmentul AB.

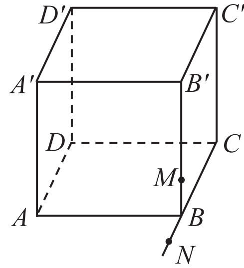
5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Cercul de centru I este tangent laturilor AB și AC în punctele M, respectiv N.



(2p) **a)** Arată că patrulaterul $AMIN$ este pătrat.

(3p) **b)** Arată că aria cercului de centru I este mai mare decât jumătate din aria triunghiului ABC.

6. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub cu latura de 12 cm. M este un punct pe muchia BB', $MB = 3$ cm, iar N este un punct pe dreapta BC, B între N și C, astfel încât $NB = 4$ cm.



(2p) **a)** Arată că punctele N, M și C' sunt coliniare.

(3p) **b)** Determină cosinusul unghiului dintre planele $(C'AM)$ și (ABC).

SOLUȚII

TEME RECAPITULATIVE

TEMA 1. Numere naturale. Numere întregi

1. a) 50; b) 21; c) 2; d) 27. **2.** 45. **3.** Valoarea minimă este 0, iar valoarea maximă este 30. **4.** $n \in \{60, 61, 64, 69\}$. **5.** 1077, 1087. **6.** $a = 15$, $b = 4$. **7.** $a = 20$, $b = 60$, $c = 422$. **8.** 283. **9.** a) 16; b) 0; c) 7; d) 28; e) 32; f) 54; g) 7; h) 12. **10.** b) $a = 2^{30} = 8^{10} < 9^{10} = 3^{20} = b$. **11.** a) $a = (2 \cdot 3^{21})^2$; b) Cum ultima cifră a numărului b este 7, rezultă că b nu este pătrat perfect. **12.** a) Numărul a este suma a 12 numere impare, deci este un număr par; b) $a = (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + (3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7) + (3^8 + 3^9 + 3^{10} + 3^{11}) = 40(1 + 3^4 + 3^8) \vdots 10$. **13.** $a = 12 \cdot 14^n \vdots 12$. **14.** $\overline{abcd} = 100\,\overline{ab} + \overline{cd} = 300\,\overline{cd} + \overline{cd} = 7 \cdot 43 \cdot \overline{cd} \vdots 7$. **15.** $p = 2$, $q = 3$, $r = 7$. **16.** a) $56 = 2^3 \cdot 7$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $144 = 2^4 \cdot 3^2$, $2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; b) 10 divizori naturali. **17.** a) $n \in \{70, 72, 74, 76, 78\}$; b) $n \in \{630, 612, 684, 666, 648\}$; c) $n \in \{252, 552, 852, 156, 456, 756\}$; d) $n \in \{170, 125\}$. **18.** $(48, 60) = 12$, $[48, 60] = 240$; b) $(12, 15, 18) = 3$, $[12, 15, 18] = 180$. **19.** Fie x numărul maxim de pachete. Atunci, cum 168, 96 și 72 trebuie să se dividă cu x, rezultă că x este cel mai mare divizor comun al numerelor 168, 96, 72, adică $x = 24$. **20.** Fie x numărul florilor din florărie. Din relațiile $x = 18a + 3 = 24b + 3$ ($a, b \in \mathbb{N}$), deducem că $x - 3 = 72k$ sau $x = 72k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$). Cum $450 < 72k + 3 < 570$, rezultă că $x = 72 \cdot 7 + 3 = 507$. **21.** Fie x numărul de sportivi. Avem $x = 6a + 3 = 5b + 1 = 9c + 6$, deci $x + 3 = 6(a + 1) = 4(b + 1) = 9(c + 1)$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$). De aici rezultă că $x + 3 = 36k$ ($k \in \mathbb{N}$) și, cum $x + 3 < 53$, deducem că $x = 33$. Numărul maxim de grupe este 11, iar numărul de sportivi dintr-o grupă este 3. **22.** Fie a numărul CD-urilor de 54 de lei și b numărul CD-urilor de 90 de lei cumpărate de Sanda. Avem $54a + 90b = 486$ sau $3a + 5b = 27$. Cum 3 divide pe $3a$ și pe 27, rezultă că 3 divide pe $5b$. De aici, având în vedere că $0 < b < 6$, rezultă că $b = 3$. Deci, $a = 4$ și $b = 3$. Sanda a cumpărat 7 CD-uri. **23.** a) $-7 < -3 < -2 < 0 < 1 < 4 < 9$; b) $7 > 3 > 1 > -1 > -2 > -4 > -5$. **24.** $-8 = (-8) + (-1) + (+1)$. **25.** a) -3; b) 1; c) 5; d) 1; e) -1; f) 21; g) 3; h) 11. **26.** -17°C. **27.** Divizorii întregi ai numărului 288 sunt $-1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$ Suma lor este 0. **28.** $(x + 1) \mid (2x + 5) \Leftrightarrow (x + 1) \mid ((2x + 5) - 2(x + 1)) \Leftrightarrow (x + 1) \mid 3 \Leftrightarrow x + 1 \in \{-3, -1, 1, 3\} \Leftrightarrow x \in \{-4, -2, 0, 2\}$. **29.** $|x| > 3 \Leftrightarrow x \in \{\ldots, -6, -5, -4, 4, 5, 6, \ldots\}$; $|x + 1| \le 6 \Leftrightarrow x + 1 \in \{-6, -5, -4, \ldots, 4, 5, 6\} \Leftrightarrow x \in \{-7, -6, -5, -4, -3, \ldots, 3, 4, 5\}$. Deci, $x \in \{-7, -6, -5, -4, 4, 5\}$. **30.** $(x + 1)(y + 1) = 5 \Leftrightarrow (x, y) \in \{(-6, -2), (-2, -6), (0, 4), (4, 0)\}$.

TEMA 2. Numere raționale

1. a) 1; b) 1; c) -2; d) 1; e) $-\frac{1}{12}$; f) 2; g) 14; h) $\frac{5}{6}$. **2.** a) $n \in \{0, 1, 2\}$; b) $n = 3$; c) $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. **3.** Opusul lui a este $-a = 1{,}25$. Inversul lui a este $\frac{1}{a} = -\frac{4}{5}$. Modulul lui a este $|a| = 1{,}25$. **4.** $\frac{6}{15} = 0{,}4$; $\frac{11}{5} = 5{,}5$; $\frac{1}{625} = 0{,}0016$. **5.** a) $-\frac{5}{4} < -\frac{1}{2} < -0{,}(4) < 1{,}1(3) < \frac{4}{3} < 1{,}7$; b) $0{,}(3) > 0{,}33 > 0{,}(32) > 0{,}3(2) > 0{,}3 > 0{,}2(3)$. **6.** $\left[\frac{23}{4}\right] = 5, \left\{\frac{23}{4}\right\} = 0{,}75$, $\left[-\frac{9}{5}\right] = -2, \left\{-\frac{9}{5}\right\} = 0{,}2$. **7.** $A \cap \mathbb{N} = \{2; 5\}$, $A \cap \mathbb{Z} = \{-7; 2; 5\}$, $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) = \left\{-\frac{23}{3}; -3{,}4; 0{,}5; 1{,}(2)\right\}$. **8.** $a = 5$; $b = 1$. **9.** $(a - 2)^{10} = (1 - 2)^{10} = 1$. **10.** $a = 10 \in \mathbb{N}$. **11.** $a = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) = \frac{9}{10} = 0{,}9$. **12.** $\left(\frac{2a}{3}\right)^{100} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^{100} = 1$. **13.** $\frac{12}{7}$. **14.** Dacă n este impar, atunci $a = -\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{4}$, iar dacă n este par, atunci $a = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3}{4}$. Prin urmare, $|a| = \frac{3}{4}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. **15.** $9x = 9 \cdot \frac{10}{9} = 10 \in \mathbb{N}$. **16.** Avem $\frac{48}{5} \cdot \frac{a}{b} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b \mid 48$

$= \frac{AB \cdot CC'}{2} = \frac{BC \cdot AO}{2}$, rezultă $CC' = \frac{16}{5}$.

TEMA 7. Ecuații. Sisteme de ecuații. Inecuații

1. a) Falsă, deoarece propoziția $6 - 3 = 1$ este falsă; b) Falsă, deoarece propoziția $-2 \in \mathbb{N}$ este falsă **2.** a) $x = 6$; b) $x = -1$; c) $x = -1{,}6$; d) $x = 12{,}55$; e) $x = -2$; f) $x = 2$; g) $x = 3{,}3$; h) $x = 0{,}4$. **3.** a) 5; b) –1; c) $\frac{11}{6}$; d) $\varnothing$; e) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; f) $\varnothing$. **4.** a) $x = 1$, $y = 2$; b) $a = 2$, $b = -3$. **5.** a) $x = \frac{3}{2}$; b) –3 sau 3. **6.** a) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$; b) $x \in \{7, 8, 9, ...\}$; c) $x \in \{3, 4, 5, ...\}$; d) $x \in (-\infty, -4)$; e) $x \in (1, \infty)$; f) $x = 0$. **7.** a) $x = 1$ este soluție dacă $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \le \frac{a-1}{6}$, rezultă $a \ge 6$, deci $a \in [6, \infty)$; b) Pentru $a = 6$ inecuația devine $\frac{2x-1}{3} + \frac{x}{2} \le \frac{5}{6}$, de aici $x \le 1$ și cum $x \in \mathbb{N}$ rezultă $x \in \{0, 1\}$. **8.** a) $\frac{4x}{3x+1} \in \mathbb{Z}$ dacă $3x + 1 \mid 4x$ și cum $3x + 1 \mid 3x + 1$, rezultă $3x + 1 \mid 4(3x + 1) - 3 \cdot 4x$, deci $3x + 1 \mid 4 \Rightarrow 3x + 1 \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$ și $x \in \mathbb{Z}$. Deducem $x \in \{-1, 0, 1\}$; b) $\frac{4x}{3x+1} = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{n}{4-3n}$, $n \in \mathbb{Z}$. **9.** a) Fie a, b, c, d notele primite de elev. Atunci $a + b + c = 21$; media $= \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{26}{4} = 6{,}50$; b) $7{,}50 = \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{21+d}{4} \Rightarrow d = 9$. **10.** a) 1925 de lei; b) Fie $p\%$ procentul căutat. Atunci, $1925 - p\% \cdot 1925 = 1540 \Rightarrow p = 20$. **11.** a) Fie x suma inițială. În prima zi cheltuiește $\frac{3x}{10}$ lei și îi rămân $\frac{7x}{10}$ lei. A doua zi cheltuiește $\frac{x}{5}$ lei și îi rămân $\frac{x}{2}$ lei. A treia zi cheltuiește $\frac{x}{3}$ lei și îi rămân $\frac{x}{6}$ lei. Cum $\frac{x}{5} < \frac{3x}{10} < \frac{x}{3}$, cel mai mult a cheltuit a treia zi; b) Din $\frac{x}{6} = 100$ rezultă $x = 600$ de lei. **12.** a) Dacă ar fi 36 de cărți pe cele două rafturi, pe primul ar fi 27 de cărți, iar pe al doilea, 9 cărți. Mutând cărțile, pe primul raft rămân 7 cărți, iar pe al doilea vor fi 29 de cărți. Cum $29 \ne 7 \cdot 3$, nu pot fi 36 de cărți pe cele două rafturi; b) Fie n numărul de cărți de pe al doilea raft; atunci, pe primul raft sunt $3n$ cărți. Mutând cărțile, pe primul raft sunt $3n - 20$ cărți, iar pe al doilea sunt $n + 20$ cărți. Cum $n + 20 = 3(3n - 20)$, rezultă $n = 10$. Prin urmare, pe primul raft sunt 30 de cărți. **13.** a) În prima zi autoturismul a parcurs $\frac{1}{5} \cdot 500$ km = 100 km, iar a doua zi a parcurs $\frac{2}{5} \cdot 400$ km = 160 km. Pentru a treia zi au rămas 240 km; b) Fie x lungimea traseului. În prima zi a parcurs $\frac{x}{5}$ km și au rămas $\frac{4x}{5}$ km. A doua zi a parcurs $\frac{8x}{25}$ km și au rămas $\frac{12x}{25}$ km. Din $\frac{12x}{25} = 120$ rezultă $x = 250$. Prin urmare, traseul are 250 km. **14.** a) După n zile, în primul depozit rămâne o cantitate egală cu $320 - 15n$, iar în al doilea $180 - 10n$. Din $320 - 15n = 2(180 - 10n) \Rightarrow$ $\Rightarrow n = 8$; b) $320 - 15n = 180 - 10n \Rightarrow n = 28$, imposibil, deoarece, după 18 zile al doilea depozit devine gol. **15.** a) $\frac{1}{48}$; b) $x = 16$, $y = 9$. **16.** a) În prima zi s-au arat 60 ha, a doua zi 50 ha, iar a treia zi 90 ha. Cel mai mult s-a arat în ultima zi. b) Fie x numărul de hectare ale terenului. În prima zi se ară $\frac{3x}{10}$ ha, a doua zi $\frac{x}{4}$ ha, iar a treia zi 90 ha. Deci, $\frac{3x}{10} + \frac{x}{4} + 90 = x$, de unde $x = 200$. Prin urmare, terenul are 200 ha. **17.** a) Fie n numărul de zile în care și-a propus Ionel să rezolve problemele și p numărul de probleme pe care le are de rezolvat. Atunci $p = 15n + 10$ și $p = 20(n - 3)$. Rezultă $n = 14$; b) $p = 220$. **18.** a) Dacă ar fi 10 copii, cadoul ar costa $(10 \cdot 20 + 30)$ lei = 230 de lei și, totodată, $9 \cdot 30 = 270$ de lei, fals. Deci, nu pot fi 10 copii; b) Fie x prețul cadoului și n numărul de copii; atunci $x = 20n + 30$ și $x = (n - 1) \cdot 30$. Deducem $n = 6$ și $x = 150$. Prețul cadoului este 150 de lei. **19.** a) Fie n numărul de copii și S suma obținută din sponsorizare. Atunci $S = 150n - 500$ și $S = 130n + 100$. Din $150n - 500 = 130n + 100 \Rightarrow n = 30$, $S = 4000$. Prin urmare, sunt 30 de copii; b) Sponsorizarea a fost de 4000 de lei. **20.** a) Fie x prețul unui caiet și y prețul unui pix. Atunci $5x + 4y = 62$

și $4x + 5y = 64$, deci $9(x + y) = 126$ și, astfel, $x + y = 14$. Un caiet și un pix costă 14 lei; b) $x = 6$, $y = 8$. Caietul costă 6 lei, iar pixul costă 8 lei. **21.** a) Dacă ar fi 12 fete, atunci ar fi $\frac{80}{100} \cdot 12 = \frac{48}{5}$ băieți, imposibil; b) Fie f numărul fetelor și b numărul băieților. Atunci $b = \frac{80}{100}f$, deci $b = \frac{4}{5}f$. Dacă $p\%b = f$, rezultă $p\% = 125\%$. **22.** a) Fie x, y numărul timbrelor avute de Andrei, respectiv Vlad. Atunci $x + y = 100$ și $\frac{40}{100}x = 12 + \frac{30}{100}y$. Rezultă $x = 60$, $y = 40$; b) Andrei are de 1,5 ori mai multe timbre decât Vlad. **23.** a) Primul copil rămâne cu $a - \frac{1}{2}a = \frac{a}{2}$ lei; al doilea rămâne cu $b - \frac{2}{3}b = \frac{b}{3}$ lei, iar al treilea rămâne cu $c - \frac{3}{4}c = \frac{c}{4}$ lei. Astfel, $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$; b) Cum $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ și $a + b + c = 180$, rezultă că $a = 40$ de lei, $b = 60$ de lei și $c = 80$ de lei. **24.** a) Prin verificare, n nu poate fi 12; b) Din teorema împărțirii cu rest obținem $319 = nc_1 + 7$, $945 = nc_2 + 9$ și $333 = nc_3 + 8$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N}$. Rezultă că n este divizor al numerelor 312, 936 și 325. Cum cel mai mare divizor comun al numerelor 312, 936 și 325 este 13, rezultă $n = 13$. **25.** a) Din teorema împărțirii cu rest obținem $n = 18c_1 + 2$, $n = 30c_2 + 2$ și $n = 24c_3 + 2$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N}^*$. Deci, $n - 2$ este multiplu comun al numerelor 18, 30 și 24. Cum cel mai mic multiplu comun al numerelor 18, 30 și 24 este 360, rezultă $n - 2 \in \{360, 360 \cdot 2, 360 \cdot 3, ...\}$. Găsim $n = 362$; b) $n \in$ $\in \{1802, 2162\}$. **26.** a) Se verifică direct că în coș pot fi 301 nuci; b) Fie n numărul minim de nuci; atunci $n = 2a + 1$, $n = 3b + 1$, $n = 5c + 1$ și $n = 7d$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Din primele trei relații deducem $n = 30t + 1$, $t \in \mathbb{N}$, deci $n \in \{1, 31, 61, 91, 121, ...\}$ și $n = 7d$. Rezultă că numărul minim de nuci din coș este 91. **27.** a) Fie f numărul fetelor și b numărul băieților din clasă. Atunci $f + 8 = \frac{2}{3}b$ și $f = \frac{2}{3}(b - n)$. Rezultă $\frac{2b}{3} - 8 = \frac{2b}{3} - \frac{2n}{3} \Rightarrow n = 12$; b) $f = \frac{2}{3}(b - 12) \geq 0 \Rightarrow b \geq 12$. **28.** a) 5% din 10 kg = 500 g; b) Fie m cantitatea de sare (în grame) ce trebuie adăugată. Atunci $20\% = \frac{m+500}{m+10000} \Rightarrow$ $\Rightarrow m = 1875$ g; c) În noul amestec sunt 3500 g de sare; $p\% = \frac{3500}{40000} \Rightarrow p = 8{,}75$. Concentrația noului amestec este 8,75%. **29.** a) 6,66; b) Fie x noua notă primtă. Atunci $\frac{5+7+8+x}{4} \geq 7 \Rightarrow x \geq 8$. Prin urmare, noua notă primită ar trebui să fie 8, 9 sau 10. **30.** a) Un elev care răspunde corect la 50 de întrebări primește $50 \cdot 5 - 50 \cdot 3 = 100$ puncte, deci nu va fi admis; b) Fie x numărul minim de răspunsuri corecte pentru a fi admis; din $5 \cdot x - 3(100 - x) \geq 200 \Rightarrow x \geq 62{,}5$. Deci, numărul minim de răspunsuri corecte trebuie să fie 63.

TEMA 8. Unghiuri. Triunghiuri. Patrulatere

1. $AB = 6$ cm. **2.** $AB = 34$ cm. **3.** $\sphericalangle BAN = 60°$. **4.** $\sphericalangle CAD = 40°$. **5.** $x = 40°$. **6.** $x = 20°$. **7.** $x = 15°$. **8.** $\sphericalangle ABD = 110°$. **9.** $\sphericalangle A - \sphericalangle C = (90° - 25°) - (90° - 40°) = 15°$. **10.** $\sphericalangle AIB = 180° - \frac{1}{2}(\sphericalangle A + \sphericalangle B) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle C) = 110°$. **11.** $\mathscr{P}_{ABC} =$ $= 15$ cm. **12.** 13,5 cm. **13.** $CD = 2{,}5$ cm. **14.** Dacă O este mijlocul lui BC, atunci $G \in AO$ și $AG = 2GO$. Obținem $AG =$ $= \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}BC = 6$ cm. **15.** $\sphericalangle C = 120°$. **16.** $S = 2{,}5$. **17.** $BD = 10$ cm. **18.** $\sphericalangle CBD = 65°$. **19.** $CB = 7$ cm. **20.** 15°. **21.** $AB = 14$ cm. **22.** $AB = 14$ cm, $CD = 6$ cm. **23.** a) $\Delta AMP \equiv \Delta CMB$ (LUL), deci $AP = BC = 9$ cm; b) Din congruența precedentă rezultă și $\sphericalangle PAM \equiv \sphericalangle C$. Analog se arată că $\Delta ANQ \equiv \Delta BNC$, de unde $AQ = BC$ și $\sphericalangle QAN \equiv \sphericalangle B$. Atunci $\sphericalangle PAQ =$ $= \sphericalangle PAM + \sphericalangle BAC + \sphericalangle QAN = \sphericalangle C + \sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$, deci punctele P, A și Q sunt coliniare. În plus, $AP = AQ$ (= BC), așadar A este mijlocul segmentului PQ. **24.** a) $\sphericalangle A = 180° - \sphericalangle B - \sphericalangle C = 60°$; unghiul BNC este exterior triunghiului ACN, deci $\sphericalangle BNC = \sphericalangle A + \sphericalangle ACN$, de unde $\sphericalangle ACN = 120° - 60° = 60°$; b) Triunghiul ACN are două unghiuri de 60°, deci este echilateral. Apoi, $\sphericalangle BAM = 180° - \sphericalangle B - \sphericalangle BMA = 30°$, așadar AM este bisectoarea unghiului A. Rezultă că AM este mediatoarea segmentului CN. **25.** a) Avem $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 2 \cdot \sphericalangle A$, deci $5 \cdot \sphericalangle A = 180°$, de unde $\sphericalangle A = 36°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 72°$. Cum BM este bisectoarea unghiului B, deducem că $\sphericalangle ABM = 36°$; b) Din $\sphericalangle A = \sphericalangle ABM = 36°$ rezultă că ABM este triunghi isoscel, cu $AM = BM$. Apoi din $\sphericalangle BMC = \sphericalangle C = 72°$ rezultă că BCM este triunghi isoscel, cu $BM = BC$. Astfel, $AM = BC$

bazei mici $MN = \dfrac{AF + BE}{2}$ = 90 cm, latura bazei mari AF = 60 cm și muchia laterală de 30 cm. Atunci $h_{tr.} = 10\sqrt{6}$ cm și $\mathcal{V} = 42750\sqrt{2}$ cm^3. **30.** $\mathcal{V} = \dfrac{1053\sqrt{3}}{4}$ < 526,5 cm^3. Deoarece 13 cm^3 cântăresc 10 g, obținem că masa lumânării va fi mai mică decât $\dfrac{10 \cdot 526,5}{13}$ = 405 g.

TEMA 14. Corpuri rotunde

1. 157 = 3,14· 25 · h, deci h = 2 cm. **2.** $\mathcal{V}$ = 900π cm^3, masa corpului = 1,5π kg > 4,7 kg. **3.** a) $\mathcal{A}_l$ = 550 cm^2, deci vom folosi $\dfrac{3}{5}$ · 550 = 330 g vopsea; b) $\mathcal{V}$ = 1925 cm^3 < 2 ℓ. **4.** a) $\mathcal{A}_l$ = 120 dm^2; b) Analizăm două situații: 1) Dacă generatoarea este AD, atunci G = 10 dm, $R = \dfrac{6}{\pi}$ dm, $\mathcal{V} = \dfrac{360}{\pi}$ dm^3; 2) Dacă generatoarea este AA_1, atunci G = 12 dm, $R = \dfrac{5}{\pi}$ dm, $\mathcal{V} = \dfrac{300}{\pi}$ dm^3. **5.** a) R = 3 cm; b) Considerând desfășurarea suprafeței laterale, drumul minim este reprezentat de segmentul AE de pe desfășurare; $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{9\pi^2 + 49} < \sqrt{90 + 49}$ < 12 cm. **6.** a) R = 10 cm, G = 28 cm; b) Pentru a avea pierderi minime, înălțimea prismei va fi egală cu generatoarea trunchiului, iar bazele prismei vor fi pătrate, având vârfurile pe circumferințele bazelor cilindrului; $\mathcal{V}_{\text{cilindru}}$ = 8800 cm^3; $AB = R\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{V}_{\text{prismă}}$ = = 5600 cm^3. Se pierd 3200 cm^3. **7.** $\mathcal{A}_l$ = 18π cm^2. **8.** a) R = 3,5 cm, $\mathcal{A}_l$ = 137,5 cm^2 și se pot confecționa cel mult 72 de cornete; b) $\mathcal{V}$ = 154 cm^3; masa cornetului este $\dfrac{154}{56} \cdot 40$ = 110 g. **9.** a) $R = 5\sqrt{2}$ cm; b) $\mathcal{V} = \dfrac{\pi R^2 H}{3} = \dfrac{1000\pi}{3}$ cm^3 > 1 ℓ, deci încape 1 ℓ de apă în vasul obținut. **10.** a) G = 12 cm, $H = 6\sqrt{3}$ cm < 10,5 cm; b) Desfășurarea suprafeței laterale este un sector de disc având unghiul α = 360° · $\dfrac{R}{G}$ = 180°, iar drumul minim este reprezentat de segmentul AB de pe desfășurare; $AB = 12\sqrt{2}$ cm. **11.** 51 g. **12.** a) H = 12 cm; b) Dacă v este volumul conului mic și h înălțimea sa, atunci $\dfrac{v}{V} = \left(\dfrac{h}{H}\right)^3$, deci $\left(\dfrac{h}{H}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$, de unde h = 6 cm. Secțiunea se va face la 6 cm de planul bazei. **13.** $\mathcal{V}$ = 11,1π ℓ > 30 ℓ, deci robinetul nu poate umple găleata. **14.** a) r = 2 cm; b) $\mathcal{V}_{\text{tr.}}$ = 181π ml, iar 181π > 500, deci încap 500 ml de suc în pahar. **15.** a) R = 8 dm, $h = 6\sqrt{3}$ < 11 dm; b) Dacă $AD \cap BC = \{M\}$, atunci triunghiul MAB este echilateral, iar distanța de la M la planul bazei mici va fi egală cu $2\sqrt{3}$ dm. **16.** a) h = 12 cm; b) $\mathcal{A}_{\text{piesă}} = \mathcal{A}_{t\text{ trunchi}} + \mathcal{A}_{l\text{ cilindru}} - 2\mathcal{A}_{b\text{ cilindru}}$ = 410π cm^2. **17.** a) R = 7 cm, r = 1 cm, h = 8 cm, h = 10 cm, $\mathcal{V}_{\text{tr.}}$ = 152π cm^3 > 475 cm^3; b) Se va acoperi cu hârtie suprafața laterală și baza mică, deci vom folosi 81π cm^2. Dacă s este suprafața de hârtie folosită la ambalare, atunci $\dfrac{90}{100}s$ = 81π, de unde s = 90π cm^2. **18.** a) $R + r$ = 24 și $R - r$ = 6, deci R = 15 cm, r = 9 cm, $\mathcal{V}_{\text{tr.}}$ = 1176π cm^3; b) Generatoarea conului va fi egală cu 25 cm, deci măsura unghiului va fi α = 216°. **19.** a) S = 96π cm^2; b) $\dfrac{4 \cdot \pi \cdot 6^3}{3} = \dfrac{\pi \cdot 12^2 \cdot h}{3}$, de unde h_{con} = 6 cm.
20. $\mathcal{V}_{\text{dovleac}}$ = 4π · 24^2, deci $\dfrac{4\pi r^3}{3}$ = 4π · 24^2, așadar, raza dovleacului este r = 12 cm.

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ

PRECIZĂRI

Subiectul I și Subiectul al II-lea

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

Subiectul al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut.

TESTUL 1

Subiectul I. 1. c). **2.** c). **3.** b). **4.** d). **5.** a). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** d). **3.** a). **4.** c). **5.** b). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. Fie x lungimea drumului în kilometri. a) Dacă în prima zi biciclistul ar fi parcurs 13 km, atunci $\frac{x}{3}-5=13$, de unde rezultă că $x = 54$ km, ceea ce nu este posibil, deoarece numai în ultima zi biciclistul a parcurs 55 km. Deci, nu este posibil ca biciclistul să fi parcurs în prima zi 13 km; b) În prima zi biciclistul a parcurs $\left(\frac{x}{3}-5\right)$ km, iar în a doua zi a parcurs $\left[15+\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3}+5\right)\right]$ km. Din ecuația $\frac{x}{3}-5+15+\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{3}+5\right)+55=x$, rezultă că $x = 150$ km. **2.** b) $E(n) = 1-\frac{4}{n+2}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, 1, 2\}$; $E(n) \in \mathbb{Z} \Rightarrow n+2 \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\} \Rightarrow n \in \{-6, -4, -3, -1, 0\}$. **3.** a) $A(-3, 0)$, $B(0, 4)$; b) B este mijlocul segmentului AP, deci $x_B = \frac{x_A+x_P}{2}$ și $y_B = \frac{y_A+y_P}{2}$, de unde rezultă că $x_P = 3$ și $y_P = 8$, deci $P(3, 8)$. **4.** a) $\mathcal{A}_{ADC} = \frac{AB\cdot DC}{2} = 48$ cm^2; b) Fie $\{F\} = DE \cap AC$. Deoarece $\sphericalangle FDC + \sphericalangle FCD = \sphericalangle BDE + \sphericalangle ACB = 90°$, rezultă că $EF \perp AC$. Din relațiile $EF \perp AC$ și $CB \perp AE$, deducem că D este ortocentrul triunghiului ACE, deci $AD \perp EC$. **5.** a) Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul ADC, obținem $AC = 15$ cm. Cum $DC \parallel AB$, avem $\Delta DOC \sim \Delta BOA$, deci $\frac{OC}{OA}=\frac{DC}{AB}=\frac{9}{16}$. Din relațiile $\frac{OC}{OA}=\frac{9}{16}$ și $OC + OA = 15$, deducem că $OA = \frac{48}{5}$ cm; b) Analog, obținem $OD = \frac{36}{5}$ cm. Cum $OA^2 + OD^2 = AD^2$, rezultă că diagonalele trapezului, AC și BD, sunt perpendiculare. **6.** a) Deoarece $BB' \perp (ABC)$ și $BM \perp CM$, rezultă că $B'M \perp CM$, deci $\mathcal{A}_{CMB'} = \frac{CM\cdot MB'}{2} = \frac{6\sqrt{3}\cdot 10}{2} = 30\sqrt{3}$ cm^2; b) d(A, (CMB')) $= \frac{BB'\cdot \mathcal{A}_{ACM}}{\mathcal{A}_{CMB'}} = \frac{24}{5} = 4{,}8$ cm.

TESTUL 2

Subiectul I. 1. b). **2.** a). **3.** a). **4.** d). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** c). **3.** c). **4.** b). **5.** c). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. a) Dacă r este numărul merelor roșii, g al celor galbene și v al celor verzi, atunci, din relațiile

TESTUL 37

Subiectul I. 1. a). **2.** d). **3.** c). **4.** c). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** a). **3.** a). **4.** b). **5.** c). **6.** c).
Subiectul al III-lea. 1. a) 20%; b) 240 de băieți și 288 de fete. **2.** a) $x^3 + x^2 - x - 1 = x^2(x + 1) - (x + 1) = (x + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)^2(x - 1)$; b) $E(x) = x$, $E(4x^2 + 9) - 12E(x) = (2x - 3)^2 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$. **3.** a) 3; b) $AB = \sqrt{2}$ u. **4.** a) Cum triunghiurile ABC și DEF sunt dreptunghice isoscele, avem $\sphericalangle NBF = \sphericalangle ABC = 45°$ și $\sphericalangle NFB = \sphericalangle DFE = 45°$, deci $\sphericalangle BND = 90°$. Din relațiile $\sphericalangle NAM = \sphericalangle AND = \sphericalangle NDM = 90°$ rezultă că patrulaterul $AMDN$ este dreptunghi; b) Observăm că: $AC = 8\sqrt{2}$ cm, $ME = MC = 5\sqrt{2}$ cm și $DE = 9\sqrt{2}$ cm, deci $AM = AC - MC = 3\sqrt{2}$ cm și $MD = DE - ME = 4\sqrt{2}$ cm. Prin urmare, $MN = 5\sqrt{2}$ cm. **5.** a) Cum $DE \cdot AB = DF \cdot BC$ înseamnă că $DF = 3 \cdot 8 : 6 = 4$ cm; b) În ΔCFD, avem $\sphericalangle F = 90°$ și $DC = 2DF$, deci $\sphericalangle C = 30°$ și $CG = CF^2 : CD = \left(4\sqrt{3}\right)^2 : 8 = 6$ cm $= CB$. Așadar, $\sphericalangle GBC = (180° - 30°) : 2 = 75°$. Din relațiile $\sphericalangle ABC = 150°$ (căci $ABCD$ este paralelogram și $\sphericalangle C = 30°$) și $\sphericalangle GBC = 75°$, rezultă că semidreapta BG este bisectoarea unghiului ABC. **6.** a) $\mathcal{V} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = 52\pi$ cm^3; b) $G = 5$ cm și $\mathcal{A}_t = \pi G(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 = 80\pi$ cm^2.

TESTUL 38

Subiectul I. 1. a). **2.** c). **3.** a). **4.** c). **5.** b). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** b). **3.** a). **4.** b). **5.** d). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) $17 + 2 \cdot 12 = 41$ m; b) 2 m pentru o bluză (3 m pentru o rochie). **2.** a) $E(x) = \frac{2x+1-x-2}{2x^2+5x+2} \cdot (2x^2+5x+2) = x-1$; b) $E(-x) \cdot E(x) = 1 - x^2 \leq 1$. **3.** a) Din relațiile $b = 5 - a$ și $3a = 2b$, obținem $a = 2$ și $b = 3$; b) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.
4. a) $AC = 17$ cm; b) Din asemănarea triunghiurilor AOB și COD, rezultă că $\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{7}{3}$, de unde obținem $AO = 11{,}9$ cm.
5. a) Aria hașurată este egală cu $\mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{AEFG} = 1500$ m^2. Cum $1500 : 20 = 75$ și deoarece putem împărți zona hașurată în 75 de dreptunghiuri de 4 m × 5 m, rezultă că numărul maxim de mașini care pot fi parcate este 75; b) Cum $AF + FC = 50 + 25 = 75 = AC$, rezultă că punctele A, F și C sunt coliniare. **6.** a) Fie M mijlocul lui CD. Deoarece $AM \perp CD$ și $BM \perp CD$, rezultă că $\sphericalangle((ACD), (BCD)) = \sphericalangle(AM, BM)$. Dacă $AO \perp (BCD)$, $O \in (BCD)$, atunci $O \in BM$ și $MO = BM : 3$. Avem $\cos(\sphericalangle(AM, BM)) = \cos(\sphericalangle AMO) = MO : AM = MO : BM = \frac{1}{3}$; b) Din relațiile $CD \perp AM$ și $CD \perp BM$ rezultă că $CD \perp (ABM)$, deci $CD \perp AB$.

TESTUL 39

Subiectul I. 1. c). **2.** b). **3.** c). **4.** c). **5.** a). **6.** b).
Subiectul al II-lea. 1. a). **2.** a). **3.** b). **4.** d). **5.** c). **6.** b).
Subiectul al III-lea. 1. a) Dacă primul clasat ar avea 12 puncte, atunci al doilea ar avea 11 puncte, iar al treilea ar avea 10,5 puncte. În acest caz, ei ar avea împreună 33,5 puncte, fals. Deci, nu este posibil ca primul clasat să aibă 12 puncte; b) 12,5 puncte; 11,5 puncte; 11 puncte. **2.** a) $E(x) = \frac{x^2-4x+4}{4x} \cdot \frac{2}{x-2} + \frac{1}{2} = \frac{x-2}{2x} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{x}$; b) $\frac{1}{4}$. **3.** a) $A(3, 0)$; $B(0, 6)$; b) $m = 9$. **4.** a) $AP = 12\sqrt{3}$ m < 21 m; b) Din relațiile $AP = CP = 12\sqrt{3}$ m și tg $60° = \sqrt{3} = \frac{CD}{CP}$, rezultă că $CD = 36$ m.
5. a) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD = 30°$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC - \sphericalangle CAD = 90°$; b) $\Delta CDA \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{CD}{CA} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow CD \cdot CB = CA^2 = 100$ cm^2.

TESTUL 85

Subiectul I. 1. c). **2.** d). **3.** c). **4.** a). **5.** c). **6.** a).
Subiectul al II-lea. 1. c). **2.** b). **3.** d). **4.** a). **5.** d). **6.** d).
Subiectul al III-lea. 1. Fie a numărul călătorilor care au urcat în A; n – numărul de stații (fără A); x – prețul unui bilet. Atunci $ax = 72$, $72 + 10nx = 1152$; $a + 3n = 44$. a) $x = 6 \Rightarrow a = 12$, $n = 18$ și $a + 3n \neq 44$. Prețul biletului nu poate fi 6 lei; b) $ax = 72$, $nx = 108$. Din $x(a + 3n) = 44x$ rezultă că $72 + 3 \cdot 108 = 44x$, deci $x = 9$, apoi $a = 8$, $n = 12$. Au călătorit $8 + 10 \cdot 12 = 128$ de persoane. **2.** a) Suma este egală cu $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + ... + \frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+8} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+8}$; b) Elementele mulțimii A sunt $3 \cdot 4$; $4 \cdot 5$; ...; $9 \cdot 10$ și suma căutată este: $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + ... + \frac{1}{9 \cdot 10} = \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{7}{30}$. **3.** a) Din $f(1) = g(1) = 2$ rezultă concluzia; b) Fie $AD \perp BC$. Rezultă $D(1, 0)$. Triunghiul ABD este dreptunghic isoscel, $AD = DB = 2$. Avem $C\left(1+2\sqrt{3},\ 0\right)$, deci $CD = 2\sqrt{3}$. Deducem că $AC = 4$ și apoi din triunghiul ADC: $\sphericalangle ACD = 30°$, $\sphericalangle DAC = 60°$. Unghiurile triunghiului ABC au măsurile: $\sphericalangle A = 105°$, $\sphericalangle B = 45°$, $\sphericalangle C = 30°$. **4.** a) În triunghiul PNN', PB este mediatoarea segmentului NN', deci $PN = PN'$; b) Lungimea sumei este egală cu $l = PM + PN = PM + PN'$ și este minimă dacă punctele M, P, N' sunt coliniare. Rezultă că $\Delta MAP \sim \Delta N'BP$, de aici $\frac{MA}{BN'} = \frac{AP}{PB}$, deci $\frac{30}{90} = \frac{AP}{PB}$ și cum $AP + PB = 50$ cm, rezultă că $AP = \frac{25}{2}$ cm, $BP = \frac{75}{2}$ cm, apoi $MP = \frac{65}{2}$ cm, $N'P = \frac{195}{2}$ cm și lungimea minimă a sumei este $l_{\min} = 130$ cm. **5.** a) Patrulaterul $AMIN$ este dreptunghi, deoarece are trei unghiuri drepte și cum $IM = IN = r$ (raza cercului) este pătrat; b) $AM = AN = r$, apoi $CN = CP$, $BM = BP$, P este punctul de tangență dintre cerc și BC. Rezultă că $BC = BP + CP = BM + CN = AB - r + AC - r$, și deducem $r = 2$ cm. Astfel, $\mathscr{A}_{\text{cerc}} = 4\pi > 12 = \frac{1}{2}\mathscr{A}_{ABC}$. **6.** a) Punctele N, M și C' sunt în planul $(BCC'B')$ și, cum $\frac{NB}{NC} = \frac{MB}{CC'}$, rezultă că $\Delta NBM \sim \Delta NCC'$, deci $\sphericalangle MNB = \sphericalangle C'NB$ și de aici concluzia; b) Punctul $N \in C'M \subset (AMC')$ și, cum $N \in (ABC)$, N este punct comun planelor (AMC') și (ABC). Dreapta comună planelor este AN. Fie $CP \perp AN$. Cum $C'C \perp (ABC)$, rezultă că $C'P \perp AN$ și $\sphericalangle((C'AM), (ABC)) = \sphericalangle C'PC$. Din $\mathscr{A}_{ACN} = \frac{AN \cdot CP}{2} = \frac{CN \cdot AB}{2}$ rezultă că $CP = \frac{24\sqrt{10}}{5}$. Deducem că $C'P = \frac{6\sqrt{260}}{5}$ și $\cos(\sphericalangle C'PC) = \frac{4}{\sqrt{26}}$.

Cuprins

Cuvânt-înainte / **5**

MEMORATOR DE MATEMATICĂ / **7**

TEME RECAPITULATIVE
- TEMA 1. Numere naturale. Numere întregi / **20**
- TEMA 2. Numere raționale / **21**
- TEMA 3. Rapoarte. Proporții. Procente / **23**
- TEMA 4. Numere reale / **24**
- TEMA 5. Calcul algebric / **27**
- TEMA 6. Funcții / **29**
- TEMA 7. Ecuații. Sisteme de ecuații. Inecuații / **33**
- TEMA 8. Unghiuri. Triunghiuri. Patrulatere / **35**
- TEMA 9. Asemănare. Relații metrice / **38**
- TEMA 10. Arii / **41**
- TEMA 11. Cercul / **44**
- TEMA 12. Elemente ale geometriei în spațiu / **47**
- TEMA 13. Poliedre / **51**
- TEMA 14. Corpuri rotunde / **54**

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ / **57**

SOLUȚII
- TEME RECAPITULATIVE / **255**
- MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ / **269**